Produit scalaire

I] Définition et propriétés :

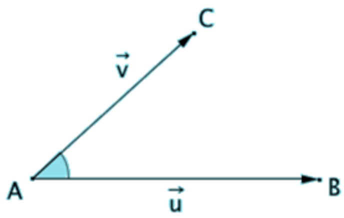
1 - Norme d'un vecteur :

Définition : Soit un vecteur $\vec{u}$ et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
La **norme du vecteur** $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la distance AB.

2 - Définition du produit scalaire :

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle **produit scalaire** de deux vecteurs, non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$,
le réel noté $\vec{u}.\vec{v}$, tel que :

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$$



$\vec{u}.\vec{v}$ se lit "$\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$".

Exemple : On donne la figure suivante, déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \widehat{BAC} \\ &= AB \times AC \times \cos 60^\circ \\ &= 3 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3\end{aligned}$$

3 - Propriété de symétrie du produit scalaire :

Propriété de symétrie : Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.

Démonstration : On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls (démonstration évidente dans la cas contraire).

$$\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) \\ &= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v}) \\ &= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos\big(-(\vec{v}\,;\vec{u})\big) \\ &= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{v}\,;\vec{u}) \\ &= \vec{v}.\vec{u}\end{aligned}$$

4 - Cas de colinéarité :

Propriété : Lorsque les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors,
$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ s'ils sont de **même sens**.
$\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ s'ils sont de **sens contraires**.

5 - Identités remarquables :

Propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :
1) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
2) $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
3) $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Démonstration pour le 1) :

$(\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}+\vec{v})$

$= \vec{u}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v}$

$= \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

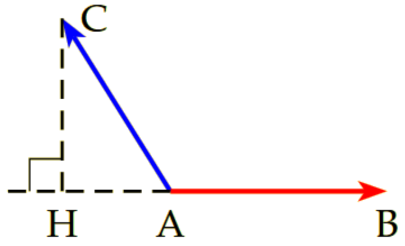
6 - Avec la projection orthogonale :

Définition : Vecteurs, non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de même origine.

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et H le projeté orthogonal de C sur (AB). On a alors

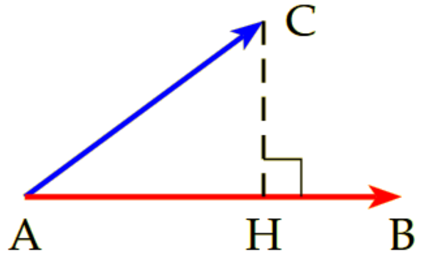
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sens contraire :



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\, AB \times AH$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ même sens :



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$

II] Autres définitions et propriétés :

1- Propriétés :

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2) \quad \text{et} \quad \vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

Démonstration de la première formule :

$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-\vec{v})^2$

$= \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

$= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

Donc $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$

Propriété : Dans un repère orthonormé, soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (x ; y) et (x' ; y').

On a : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

Démonstration : $\vec{u}.\vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j})(x'\vec{i} + y'\vec{j})$

$= xx'\vec{i}.\vec{i} + xy'\vec{i}.\vec{j} + yx'\vec{j}.\vec{i} + yy'\vec{j}.\vec{j}$

$= xx'\|\vec{i}\|^2 + xy'\vec{i}.\vec{j} + yx'\vec{j}.\vec{i} + yy'\|\vec{j}\|^2$

$= xx' + yy'$

Propriété : Dans un repère orthonormé, deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si

$$\vec{u}.\vec{v} = 0, \text{ ce qui se traduit par } xx' + yy' = 0.$$

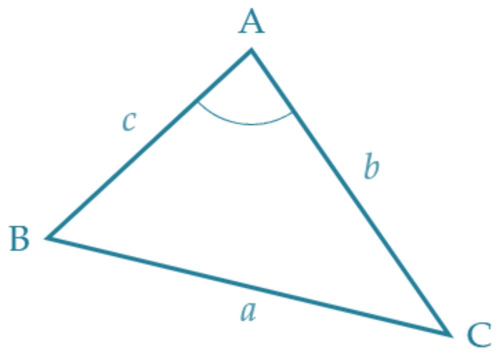
Propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

1) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
2) $\vec{u}.(k\vec{v}) = k\vec{u}.\vec{v}$, avec k un nombre réel.
3) $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
4) $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$

2- Théorème d'Al Kashi :

Théorème : Soit un triangle ABC. On a,

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \widehat{A}$$
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \cos \widehat{C}$$
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \cos \widehat{B}$$



Avec a, b et c les longueurs des côtés opposés respectivement à A, B et C. On a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$$

Démonstration : On part de la relation :

$\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$

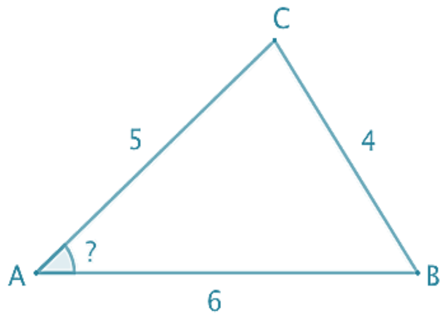
$= \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2$

$= AC^2 + AB^2 - 2AC \times AB \cos \widehat{A}$

Remarque : Sî $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$ on retrouve le théorème de Pythagore $a^2 = b^2 + c^2$.

Exemple : On considère la figure ci-contre, calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ au degré près.

D'après le théorème d'Al Kashi, on a :



$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$

$4^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \times 6 \times 5 \times \cos \widehat{BAC}$

$16 = 36 + 25 - 60 \cos \widehat{BAC}$

$60 \cos \widehat{BAC} = 36 + 25 - 16$

$60 \cos \widehat{BAC} = 45$

$\cos \widehat{BAC} = \frac{45}{60}$

$\cos \widehat{BAC} = \frac{3}{4}$

$\widehat{BAC} \approx 41°$

III] Ensemble de points :

Théorème : Soient deux points A et B et leur milieu I, pour tout point M on a la relation :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$$

Démonstration : On introduit le point I dans le produit scalaire.

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$

$= MI^2 + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$

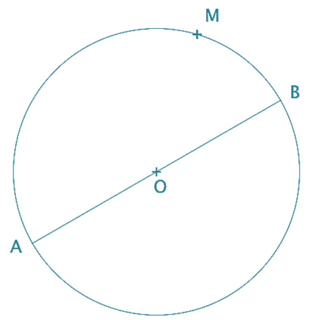
$= MI^2 + \overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) - IA^2$

$= MI^2 + \overrightarrow{MI}\,(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\,) - IA^2$

$= MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$

Propriété : L'ensemble des points M vérifiant l'égalité $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = 0$ **est le cercle de diamètre [AB].**

Démonstration : Soit O le milieu du segment [AB].



On a : $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB}=0$

$\Leftrightarrow(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) = 0$

Comme O est le milieu de [AB], on a : $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA}$

Soit : $(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}) = 0$

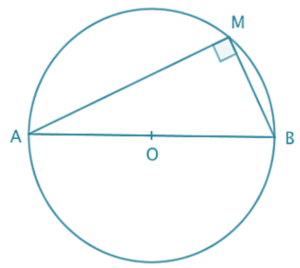
$\Leftrightarrow\overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = 0$ car $(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

$\Leftrightarrow MO^2 - OA^2 = 0$

Soit : $MO^2 = OA^2$ soit encore $MO = OA$.

M appartient donc au cercle de centre O et de rayon OA, c'est-à-dire le cercle de diamètre [AB].

Propriété : Un point M, distinct de A et B, appartient au cercle de diamètre [AB] **si et seulement si le triangle ABM est rectangle en M.**



Justification : $\overrightarrow{MA}\,.\,\overrightarrow{MB} = 0$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux.