Informations chiffrées

I] Proportion et pourcentage :

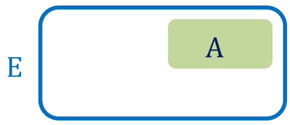
1 - Population et sous-population :

Définitions : - On appelle **population** un ensemble d'éléments appelés les individus.
- On appelle **sous-population** une partie de la population.

Remarque : Les individus d'une population ne sont pas toujours des personnes, il peut s'agir d'objets ou autre.

Exemple : On considère la population constituée par les élèves d'un lycée. Un individu est un élève. L'ensemble des élèves des classes de Seconde constitue une sous-population de la population des élèves du lycée.

2 - Proportion d'une sous-population :



Définition : On considère un ensemble E et une partie A de E.

Sous population

La **proportion** (ou **fréquence**) **p** de A dans E est $p = \dfrac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de E}}$

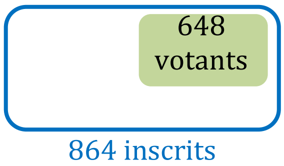
Population totale

Exemple : Lors d'une élection, sur 864 inscrits, 648 personnes ont voté.

Sous population

La proportion de votants est $p = \dfrac{648}{864} = 0{,}75$.

Population totale



Cette proportion peut s'exprimer en **pourcentage** : p = 75 %.

3 - Pourcentage d'un nombre :

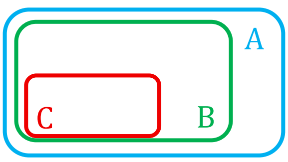
Propriété : Appliquer un pourcentage t % à un nombre N, c'est multiplier le nombre N par $\frac{t}{100}$.

$$t\ \%\ \text{de}\ N = \frac{t}{100} \times N$$

Exemple : Parmi 500 saucissons secs, 35 % sont au Beaufort (fromage).
35 % de 500 c'est, 35 % × 500 $= \frac{35}{100} \times 500 = 175$ saucissons secs au Beaufort.

4 - Proportion d'une proportion :

Propriété : On considère une population A, une sous-population B de A et une sous-population C de B.
On note p_B **la proportion d'individus de la population B dans A** et p_C **celle de C dans B**.
La **proportion p d'individus de C dans A** est $p = p_B \times p_C$



Exemple : Dans un lycée, 45 % des élèves pratiquent un sport et un tiers d'entre eux fait du badminton.

La proportion d'élèves du lycée faisant du badminton est de : $\frac{45}{100} \times \frac{1}{3} = \frac{15}{100} = 0{,}15$
Autrement dit, 15% des élèves du lycée font du badminton.

II] Evolution d'une quantité :

1 - Calculer une évolution :

Propriétés : **Augmenter une valeur de t%** revient à la multiplier par $1 + \frac{t}{100}$.

Diminuer une valeur de t% revient à la multiplier par $1 - \frac{t}{100}$.

Définition : $1 + \frac{t}{100}$ et $1 - \frac{t}{100}$ sont appelés **coefficients multiplicateurs.**

Démonstration pour l'augmentation :
Si on augmente une valeur V_0 de t % alors sa valeur V_1 après augmentation est égale à :
$V_1 = V_0 + V_0 \times \frac{t}{100} = V_0\left(1 + \frac{t}{100}\right)$.

Exemples :
- Un pull coûte 49€. Son prix augmente de 8%.
Son nouveau prix est égal à $49 \times \left(1 + \frac{8}{100}\right) = 49 \times 1{,}08 = 52{,}92$€.

$$49 \text{ augmenté de } 8\% \rightarrow 52{,}92 \qquad 49 \xrightarrow{\times 1{,}08} 52{,}92 \qquad \times\left(1 + \frac{8}{100}\right)$$

- Un polo coûte 21€. Son prix diminue de 12%.
Son nouveau prix est égal à $21 \times \left(1 - \frac{12}{100}\right) = 21 \times 0{,}88 = 18{,}48$€.

$$21 \text{ diminué de } 12\% \rightarrow 18{,}48 \qquad 21 \xrightarrow{\times 0{,}88} 18{,}48 \qquad \times\left(1 - \frac{12}{100}\right)$$

2 - Calculer un taux d'évolution :

Définition : Une quantité a une valeur de départ non nulle V_D **et varie pour atteindre** une valeur d'arrivée V_A.
Le taux d'évolution est $t = \frac{V_A - V_D}{V_D}$.

Remarques : - Si $t > 0$, l'évolution est une augmentation.
- Si $t < 0$, l'évolution est une diminution.

Exemple : La population d'un village est passé de 8500 à 10 400 entre 2008 et 2012.
Calculer le taux d'évolution de la population en %.
$t = \frac{10\,400 - 8\,500}{8\,500} \approx 0{,}224$ soit 22,4%.
La population a augmenté de 22,4%

III] Evolutions successives, évolution réciproque :

1 - Evolutions successives :

Parfois, il arrive qu'une quantité subisse plusieurs évolutions successives. Schématiquement cela correspond à la figure suivante dans laquelle une quantité V_D évolue en V_I puis en V_A.

$$\begin{tikzcd} V_D \arrow[r, bend left, "\times C_{M1}"] \arrow[rr, bend right, "\times C_M"'] & V_I \arrow[r, bend left, "\times C_{M2}"] & V_A \end{tikzcd}$$

$$C_M = C_{M1} \times C_{M2}$$

et

$$V_A = V_D \times C_{M1} \times C_{M2}$$

Avec : - C_{M1} le coefficient multiplicateur de la première évolution ;

- C_{M2} le coefficient multiplicateur de la deuxième évolution ;
- et C_M coefficient multiplicateur global.

Propriété : Pour calculer des **évolutions successives**, on multiplie les coefficients multiplicateurs relatifs à ces évolutions.

Exemple : La population d'une ville de 50 000 habitants augmente de 10% une première année puis de 20% l'année suivante.

$C_{M1} = 1 + \frac{10}{100} = 1{,}10$

$C_{M2} = 1 + \frac{20}{100} = 1{,}20$

$V_A = 50\,000 \times 1{,}10 \times 1{,}20 = 66\,000.$

Il y a 66 000 habitants après ces deux évolutions.

Remarque : On peut avoir deux augmentations successives, deux diminutions successives, une augmentation suivie d'une diminution ou une diminution suivie d'une augmentation. Cette propriété englobe tous les cas de figures et se généralise pour autant d'évolutions qu'on souhaite utiliser.

2 - Lien avec les taux d'évolution :

Propriété : Lorsqu'une quantité subit deux évolutions successives dont les taux d'évolution sont respectivement t_1 et t_2 alors le **taux d'évolution global t** vérifie

$1 + t = (1 + t_1) \times (1 + t_2)$.

$$\begin{tikzcd} V_D \arrow[r, bend left, "\times (1 + t_1)"] \arrow[rr, bend right, "\times (1 + t)"'] & V_I \arrow[r, bend left, "\times (1 + t_2)"] & V_A \end{tikzcd}$$

Exemple : Le prix d'un article a **augmenté de 5% puis a baissé de 3%**.

On appelle t le taux d'évolution global.

On a donc $1 + t = \left(1 + \frac{5}{100}\right) \times \left(1 - \frac{3}{100}\right) = (1 + 0{,}05) \times (1 - 0{,}03) = 1{,}05 \times 0{,}97 = 1{,}018\,5.$

Ainsi $1 + t = 1{,}018\,5$ soit $t = 1{,}018\,5 - 1 = 0{,}018\,5 = 1{,}85\%$.

Au global le prix de l'article a augmenté de 1,85%.

Remarque : Dans cette formule les taux d'évolutions peuvent aussi bien être positifs, dans le cas d'une augmentation, que négatifs, dans le cas d'une diminution.

3 - Evolution réciproque :

Définition : Lorsqu'on a une évolution d'une valeur de départ V_D à une valeur d'arrivée V_A alors **le taux d'évolution réciproque** est le taux d'évolution permettant de revenir de V_A à V_D.
Son coefficient multiplicateur est appelé **coefficient multiplicateur réciproque**.

Propriété : Le **coefficient multiplicateur réciproque** est égal à

$$C_{M\text{ réciproque}} = \frac{1}{C_M}$$

où C_M est le coefficient multiplicateur de l'évolution de départ.

$$\begin{tikzcd} V_D \arrow[rr, bend left, "\times C_M"] & & V_A \arrow[ll, bend left, "\times \frac{1}{C_M}"] \end{tikzcd}$$

Si l'évolution de départ a un taux t avec $C_M = 1 + t$, alors le taux réciproque $t_{réc}$ vérifie :

$$1 + t_{réc} = \frac{1}{1+t}$$

Exemple :
1) Un article coûte 50 €. Son prix augmente de 20 %. Calculer le nouveau prix de l'article.
2) Le commerçant souhaite ensuite revenir exactement au prix initial de 50 € en appliquant une seule diminution. Quel taux de diminution (en %) doit-il appliquer sur le nouveau prix ?

1) Son prix augmente de 20 %.
Le taux d'augmentation est donc $t = 20\% = 0{,}20$.
Le coefficient multiplicateur correspondant est $C_M = 1 + t = 1 + 0{,}20 = 1{,}20$.
Le nouveau prix de l'article est alors $V_A = 50 \times 1{,}20 = 60€$.

2) On cherche maintenant le taux d'évolution réciproque qui permet de revenir de 60 € à 50 €.
Le coefficient multiplicateur réciproque est $C_{M\text{ réciproque}} = \frac{1}{C_M} = \frac{1}{1{,}20} \approx 0{,}8333$.
On a donc $1 + t_{réc} = 0{,}8333$, d'où $t_{réc} \approx -0{,}1667 = -16{,}67\%$.
Ainsi, une augmentation de 20 % est annulée non pas par une diminution de 20 %, mais par une diminution d'environ 16,67 %.