Géométrie repérée

I] Équation cartésienne et équation réduite :

Définition : Une **droite** est définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$.

Remarque : La droite (AB) est définie par le point A et le vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

1- Équation cartésienne d'une droite :

Propriété : Toute droite d du plan est déterminée par une équation de la forme :

$$d : ax + by + c = 0, \text{ avec a et b non tous nuls.}$$

Un **vecteur directeur** de la droite d est alors $\vec{u}(-b\,;a)$.

Exemple : Soit la droite d définie par les points $A(2\,;3)$ et $\vec{u}(-2\,;1)$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite d.
Soit $M(x\,;y) \in d$, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & -2 \\ y-3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2) + 2(y-3) = 0$$
$$\Leftrightarrow x + 2y - 2 - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow x + 2y - 8 = 0$$

Attention : Une équation cartésienne n'est pas unique. On peut multiplier les coefficients de l'équation par un facteur k non nul. Par exemple, la droite d est définie par :

$$d : x + 2y - 8 = 0 \quad \overset{k=-2}{\Longleftrightarrow} \quad d : -2x - 4y + 16 = 0$$

2- Équation réduite d'une droite :

Propriété : Toute droite d, non verticale, admet une équation de la forme :

$$d : y = mx + p$$

où $\vec{u}(1\,;m)$ est vecteur directeur de d.

- m est la **pente** (ou coefficient directeur) de la droite.
- p est l'ordonnée à l'origine (valeur de y quand $x = 0$).

Exemple : $d : x + 2y - 8 = 0$ admet comme équation réduite :

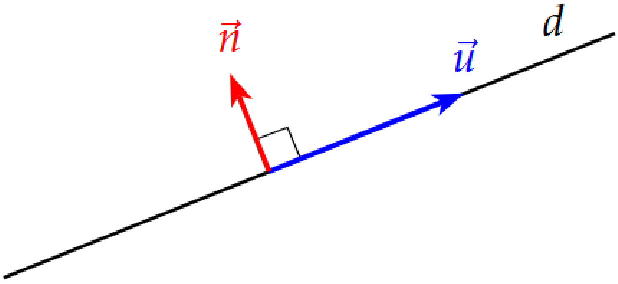
$$x + 2y - 8 = 0 \Rightarrow 2y = -x + 8 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4$$

Donc une équation réduite de d est : $y = -\frac{1}{2}x + 4$

II] Vecteur normal à une droite :

Définition : Un **vecteur normal $\vec{n}$ à une droite d** est un vecteur orthogonal à tout vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d. On a alors : $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$

Remarque : Si un vecteur $\vec{n}$ est normal à un vecteur directeur d'une droite d, il est normal à tout vecteur directeur de d.



Propriété : Dans un repère orthonormé :

- Si **d : $ax + by + c = 0$**, alors **$\vec{n}(a\,;b)$ vecteur normal à d**.
- Réciproquement si un **vecteur $\vec{n}(a\,;b)$, non nul, est un vecteur normal à une droite d**, alors **$ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de d**.

Remarque : Le repère orthonormé est essentiel pour l'orthogonalité.

Démonstration :
Soit d : $ax + by + c = 0$ de vecteur directeur $\vec{u}(-b\,;a)$
$\vec{n} \cdot \vec{u} = \binom{a}{b} \cdot \binom{-b}{a} = -ab + ab = 0$
Donc $\vec{n} \perp \vec{u}$, et $\vec{u}$ est bien un vecteur normal à d.

Exemple : Considérons la droite d : $3x - 4y + 1 = 0$
- Un vecteur normal est : $\vec{n}(3\,;-4)$
- Un vecteur directeur est : $\vec{u}(4\,;3)$(car $\vec{u}\,(-b\,;a) = -(-4\,;3) = (4\,;3)$)

Vérifions l'orthogonalité : $\vec{n} \cdot \vec{u} = 3 \times 4 + (-4) \times 3 = 12 - 12 = 0$.

Donc : $\vec{n}$ est bien normal à la droite d.

III] Équation d'un cercle :

Théorème : Dans un repère orthonormé.
L'équation cartésienne d'un cercle C, de **centre $\Omega(a\,;b)$** et de **rayon r** est de la forme :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Démonstration : Soit $M(x\,;y) \in C$ de centre Ω et de rayon r donc :

$$\Omega M^2 = r^2 \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Exemple : Montrer que l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ est un cercle. Préciser le rayon et les coordonnées du centre.

On regroupe les "x" et les "y" : $x^2 - 2x + y^2 - 2y = 2$
Débuts de carrés parfaits : $(x - 1)^2 - 1 + (y - 1)^2 - 1 = 2$
On obtient alors : $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4 = 2^2$
L'ensemble des points M est un cercle de centre $\Omega(1\,;1)$ et de rayon 2.