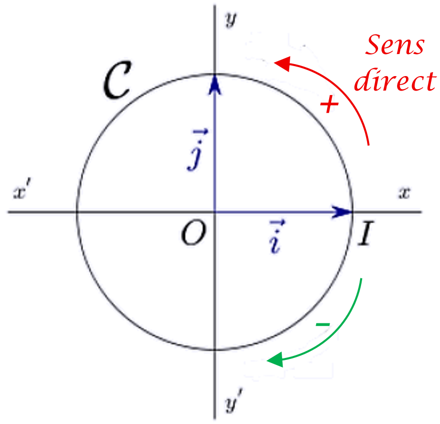
Fonctions trigonométriques

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un **repère orthonormé direct** $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

I] Le cercle trigonométrique et le radian :

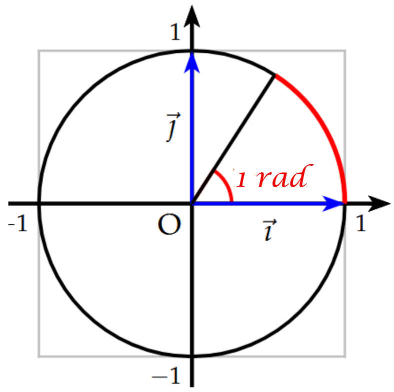
1- Définition :



Définition : On appelle **cercle trigonométrique** le cercle C de centre O et de rayon 1 sur lequel on a choisi un sens de parcours, appelé le sens direct (sens inverse des aiguilles d'une montre).

2- Le radian :

La **longueur du cercle trigonométrique** est égale à **2π**.
En effet, comme son rayon vaut 1, on a : $P = 2\pi R = 2\pi \times 1 = 2\pi$.
Ainsi, lorsque l'on effectue un tour complet sur le cercle trigonométrique, cela correspond à une longueur de 2π.
On définit alors une nouvelle unité de mesure des angles, appelée radian, telle que :
un tour complet = 360° = 2π radians.



Définition : Soit C un cercle trigonométrique de centre O dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
Le **radian**, noté **rad**, est la **mesure de l'angle au centre qui intercepte sur le cercle C un arc de longueur 1.**
Le radian est une unité de mesure d'un angle comme le degré.

3- Correspondance entre les degrés et les radians :

Comme angle de **2π radians** correspond à **360°**, c'est-à-dire un tour complet.
Par **proportionnalité**, on peut donc établir les correspondances suivantes entre degrés et radians.

Angle en degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

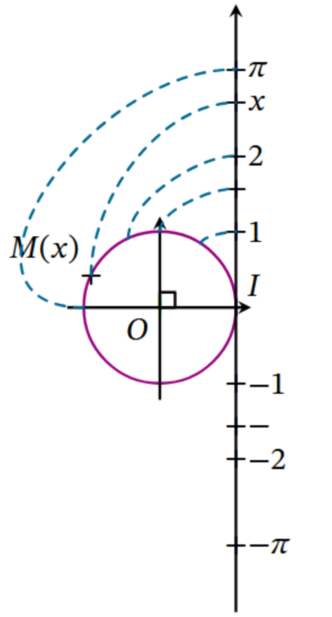
Exemple : 1) Donner la mesure en radians de l'angle α de mesure 25°.
2) Donner la mesure en degrés de l'angle β de mesure $\frac{\pi}{8}$.

Angle en degré	360°	25°	?
Angle en radian	2π	?	$\frac{\pi}{8}$

1) $\alpha = 25 \times \frac{2\pi}{360} = \frac{50\pi}{360} = \frac{5\pi}{36}$

2) $\beta = \frac{\pi}{8} \times \frac{360}{2\pi} = \frac{360}{16} = 22{,}5$

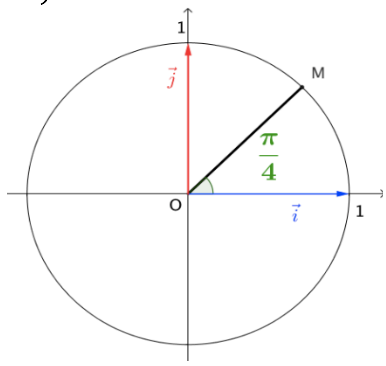
4- Enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique :



Propriété : Pour repérer un point M du cercle trigonométrique, on enroule autour du cercle un axe orienté et gradué, d'origine le point I.

On peut alors associer, au point M, un réel x, abscisse d'un point de l'axe qui vient se superposer au point M.

Exemple : Placer sur le cercle trigonométrique, le point M tel que l'angle $(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OM})$ mesure $\frac{9\pi}{4}$ rad.



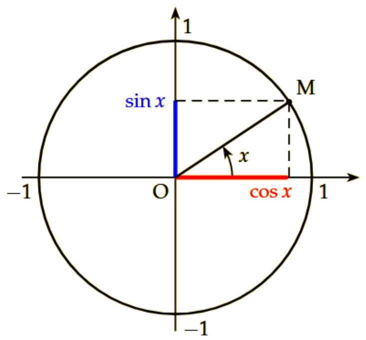
$$\frac{9\pi}{4}=\frac{8\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=2\pi+\frac{\pi}{4}$$

Un tour complet correspond à 2π, donc l'angle $\frac{9\pi}{4}$ et l'angle $\frac{\pi}{4}$ définissent **le même point** sur le cercle trigonométrique.

Le point est donc le point tel que l'angle $(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{OM})$ mesure $\frac{\pi}{4}$ rad.

II] Cosinus et sinus d'un réel :

1- Cosinus, sinus et cercle trigonométrique :



Soit C le cercle trigonométrique de centre O dans un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Soit x un réel et M le point de C associé à x.

Définitions :

- On appelle **cosinus de x**, noté **cos x**, **l'abscisse de M** dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
- On appelle **sinus de x**, noté **sin x**, **l'ordonnée de M** dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

On le note : $M(\cos x\,;\sin x)$, ou encore : $\overrightarrow{OM}=\cos x\times\vec{i}+\sin x\times\vec{j}$

2- Propriétés :

Propriété : Pour tout réel x, $-1\leqslant\cos x\leqslant1$ et $-1\leqslant\sin x\leqslant1$

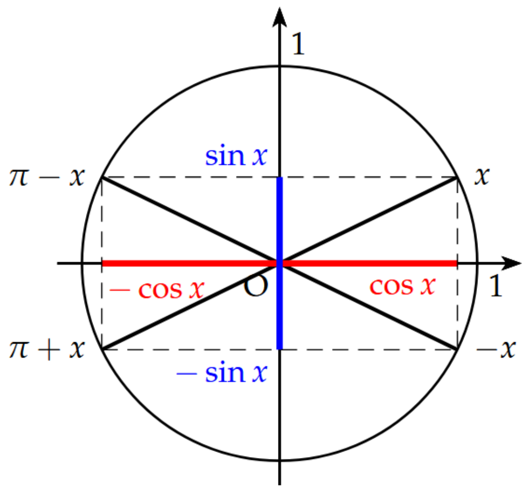
Démonstration : cos(x) est l'abscisse d'un point M du cercle trigonométrique, cercle dont le centre est O et le rayon vaut 1. Quelle que soit la position du point M sur ce cercle, cette abscisse varie donc de -1 à 1, donc on a bien pour tout réel x, $-1\leqslant\cos(x)\leqslant1$.

Même raisonnement pour sin(x), qui est l'ordonnée d'un point de ce cercle.

Propriété : Pour tout réel x, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Démonstration : Si $x \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$ alors d'après le théorème de Pythagore dans le triangle OM H, où H est le point de [OI] tel que $(MH) \perp (OI)$, on a $OM^2 = OH^2 + HM^2$, donc $1^2 = \cos^2(x) + \sin^2(x)$, soit $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
On admet le résultat pour les autres valeurs de x.

3- Relations trigonométriques :



Avec l'angle opposé :

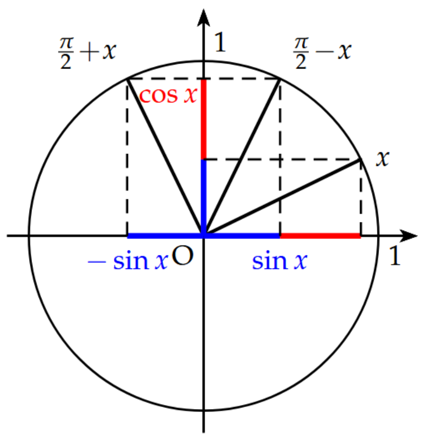
- $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(-x) = \cos x$

Avec l'angle supplémentaire :

- $\sin(\pi - x) = \sin x$
- $\cos(\pi - x) = -\cos x$

Avec l'angle diamétralement opposé :

- $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x$



Avec le complémentaire :

- $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$

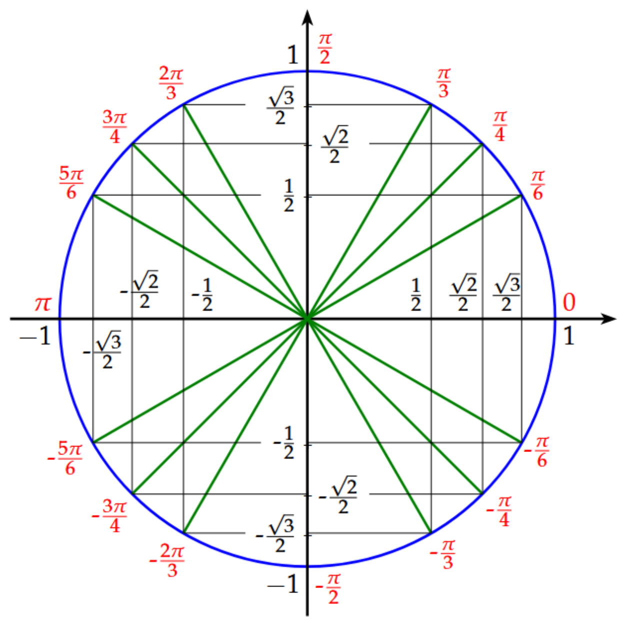
Avec un déphasage d'un quart de tour :

- $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$
- $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$

- $\forall x \in R$, $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin(x)$.

3- Cercle trigonométrique et valeurs à connaître :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	– 1
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



Démonstration : $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

La mesure $\frac{\pi}{4}$ radian est à égale à la mesure 45°.

Le triangle OHM est rectangle est isocèle en H, en effet l'angle $\widehat{OMH}$ est égal à : 180 – 90 – 45 = 45°.

Donc HO = HM et donc : $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

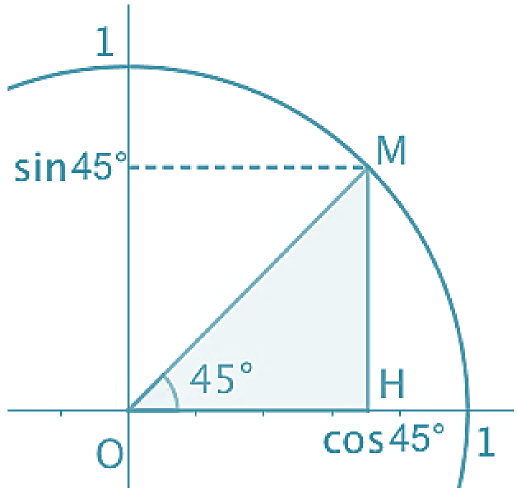
Or, $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

Soit : $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



Démonstration : $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

La mesure $\frac{\pi}{3}$ radian est à égale à la mesure 60°.

Le triangle OMA est isocèle en O, en effet OA = OM.

Donc les angles $\widehat{OMA}$ et $\widehat{MAO}$ sont égaux à : (180 – 60) ÷ 2 = 60°.

Le triangle OMA est donc équilatéral.

Ainsi, la hauteur (MH) est également une médiane du triangle.

Elle coupe donc [OA] en son milieu.

On a donc : $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

Or, $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$

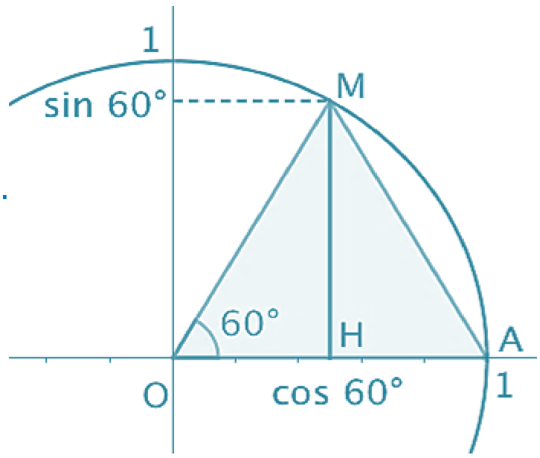
Soit : $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$

$\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{4}$

$\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}$

$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



III] Fonctions sinus et cosinus :

1- Définition :

Définition : Les fonctions sinus et cosinus, notées sin et cos, sont les fonctions définies sur R par :

$\sin : \mathbb{R} \to [-1\,;\,1]$ $x \longmapsto \sin x$	$\cos : \mathbb{R} \to [-1\,;\,1]$ $x \longmapsto \cos x$

2- Périodicité :

Propriété : - Les fonctions sin et cos sont 2π-périodique :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ et $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

- La fonction sin est impaire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin x$

- La fonction cos est paire : $\forall x \in R$, $\cos(-x) = \cos x$

Les courbes représentatives de ces fonctions sont donc :
- pour sin, symétriques par rapport à l'origine ;
- pour cos, symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Remarques :
- Comme les fonctions sin et cos sont 2π-périodique :

Leurs courbes sur R se déduisent de leurs courbes sur $[-\pi ; \pi]$ par des translations de vecteurs

$$\vec{u} = (2k\pi)\,\vec{i},\ k \in Z.$$

- Grâce à la parité des fonctions sin et cos, on peut restreindre l'étude à l'intervalle $[0 ; \pi]$, puis prolonger par symétrie.

3- Variations :

Théorème : Les fonctions sin et cos sont dérivable sur R :

$$(\sin x)' = \cos x \qquad \text{et} \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

D'après le cercle trigonométrique :
- $\forall x \in [0 ; \pi]$, $\sin x > 0 \Leftrightarrow -\sin x \leq 0 \Leftrightarrow \cos' x \leq 0$

La fonction **cos est décroissante sur $[0 ; \pi]$**.

- $\begin{cases} \forall x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right], \cos x \geq 0 \Leftrightarrow \sin' x \geq 0 \\ \forall x \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right], \cos x \leq 0 \Leftrightarrow \sin' x \leq 0 \end{cases}$

La fonction **sin est croissante sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$** et **décroissante sur $[\frac{\pi}{2} ; \pi]$.**

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
sin' x		+	0	-	
sin x	0	↗	1	↘	0

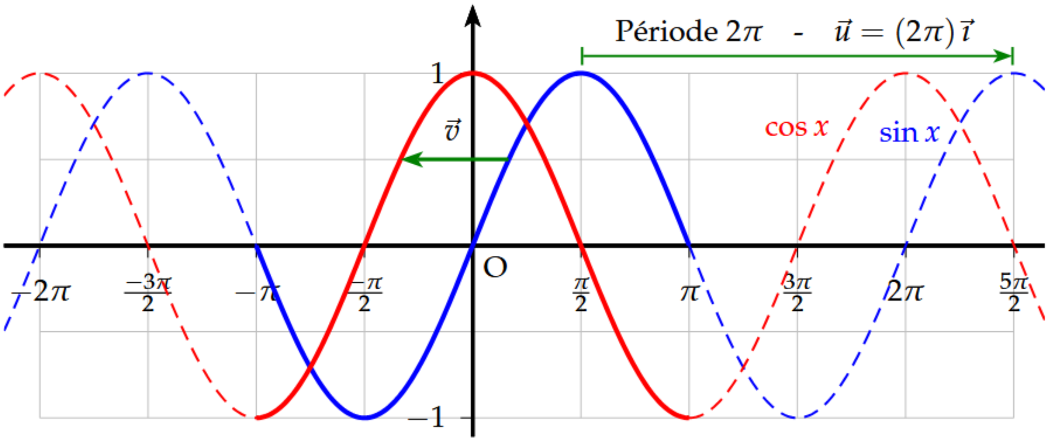
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
cos' x	0		-		
cos x	1	↘	0	↘	- 1

4- Courbes :

- Pour tracer les courbes C_{sin} et C_{cos} sur $[-\pi ; \pi]$, on utilise :
  - les valeurs remarquables (table),
  - les symétries (parité),
  - les variations.

- On obtient ensuite les courbes sur tout par translations de vecteur $\vec{u} = (2k\pi)\,\vec{i}$, $k \in Z$.

- Les courbes représentatives de sin et cos sont appelées **sinusoïdes**.



<u>Remarque :</u> De l'égalité $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, on déduit que la sinusoïde de s'obtient en **translatant** la sinusoïde de horizontalement d'un vecteur $\vec{v} = \frac{\pi}{2}\vec{i}$.

Le graphe de cos est celui de sin « avancé » de $\frac{\pi}{2}$).