Fonction exponentielle

I] La fonction exponentielle :

1- Définition :

Propriété et **définition :**

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x) \text{ et } f(0) = 1.$$

Cette fonction s'appelle **fonction exponentielle** et se note **exp**.

Remarque : En utilisant la notation exp, on a :

- Pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$.
- $\exp(0) = 1$.

2- Relation fonctionnelle :

Propriété : Pour tous réels x, y ∈ R : $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$

Démonstration :

Soit φ la fonction définie sur R par $\varphi(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$ (φ existe car $\exp \neq 0$ sur R).

φ est dérivable sur R et $\varphi'(x) = \frac{\exp(x+y)\exp(x) - \exp(x+y)\exp(x)}{(\exp x)^2} = 0$ (car $\exp' = \exp$).

Donc φ est constante sur R.

Or $\varphi(0) = \frac{\exp(0+y)}{\exp(0)} = \exp(y)$ donc pour tout x réel, $\varphi(x) = \exp(y)$, soit $\frac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y)$

Donc : $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.

3- Autres opérations :

Propriété : Pour tous réels x et y ∈ R, on a :

1) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$

2) $\exp(x - y) = \frac{\exp x}{\exp y}$

3) $\exp(nx) = (\exp x)^n$ avec $n \in N$

Remarque : Ces propriétés se déduisent directement de la relation fonctionnelle $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.

4- Notation :

Définition : De la similitude des propriétés de la fonction exponentielle et de la fonction puissance, on pose : $e^x = \exp(x)$ avec $e = \exp(1) \approx 2,718$

On a ainsi les propriétés :

$e^{x+y} = e^x \times e^y$	$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$	$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$	$e^{nx} = (e^x)^n$

II] Etude de la fonction exponentielle :

1- Signe :

Propriété : La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$$

Démonstration : Pour tout réel x ,

$$e^x = e^{x/2 + x/2} = e^{x/2} \times e^{x/2} = (e^{x/2})^2$$

Un carré est toujours positif ou nul. De plus, on peut montrer que e^x ne s'annule jamais, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0.$$

2- Variation :

Propriété : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Pour tout réel x , on a :

$$f'(x) = e^x > 0,$$

donc la dérivée est strictement positive sur R , ce qui prouve que f est strictement croissante..

Propriétés : De la stricte croissance de la fonction exponentielle :

Pour tous x, y ∈ R : 1) $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ 2) $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

Exemples : Résoudre les équations et inéquations suivantes.

$e^{3x} = e^2$

$\Leftrightarrow 3x = 2$

$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

Solution : $x = \frac{2}{3}$

$e^{5x+2} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow e^{5x+2} = 1$

$\Leftrightarrow e^{5x+2} = e^0$

$\Leftrightarrow 5x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$

Solution : $x = -\frac{2}{5}$

$e^{3x+1} - e^{-x} < 0$

$\Leftrightarrow e^{3x+1} < e^{-x}$

$\Leftrightarrow 3x + 1 < -x$

$\Leftrightarrow 4x < -1$

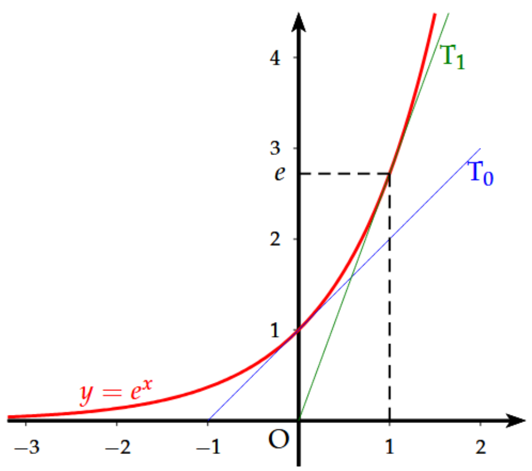
$\Leftrightarrow x < -\frac{1}{4}$

Solution : $x \in \left]-\infty\,;-\frac{1}{4}\right[$

3- Courbe représentative :

Tableau de variations de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
exp'(x)		+		
exp(x)	0 ↗	1 ↗	e ↗	$+\infty$



Courbe représentative de la fonction exponentielle

Tangentes à la courbe représentative de exp :

Au point d'abscisse 0, l'équation de la tangente est : $T_0 = (e^0)'(x - 0) + e^0 = x + 1$.

Au point d'abscisse 1, l'équation de la tangente est : $T_1 = (e^1)'(x - 1) + e^1 = ex - e + e = ex$.
Cette tangente passe par l'origine du repère.

La courbe C est toujours au-dessus des tangentes T. Une telle fonction est appelée une fonction **convexe**.

4- Dérivée de la fonction e^u :

Théorème : Soit $u : D \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un ensemble D .
La fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur D et :

$$(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$$

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{3x^2-2x+5}$
On a : $u(x) = 3x^2 - 2x + 5$ alors $u'(x) = 6x - 2$

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = (6x - 2)e^{3x^2-2x+5}$

III] Croissance et décroissance exponentielle :

Définition : Soit un réel $k > 0$, on définit les fonctions f_k et g_k sur R par :

$$f_k(t) = e^{kt} \qquad \text{et} \qquad g_k(t) = e^{-kt}$$

Les fonctions f_k correspondent à une **croissance exponentielle**.
Les fonctions g_k correspondent à une **décroissance exponentielle**.

Les fonctions f_k et g_k sont dérivables sur R :

$$\forall t \in R,\ f'_k(t) = ke^{kt} > 0 \text{ et } g'_k(x) = -ke^{-kt} < 0$$

Les fonctions f_k et g_k sont respectivement **croissantes** et **décroissantes**.

On obtient les tableaux de variation :

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_k'(t)$		$+$	
$f_k(t)$	0 ↗	1	↗ $+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g_k'(t)$		$-$	
$g_k(t)$	$+\infty$ ↘	1	↘ 0