Dérivation

I] Nombres dérivés :

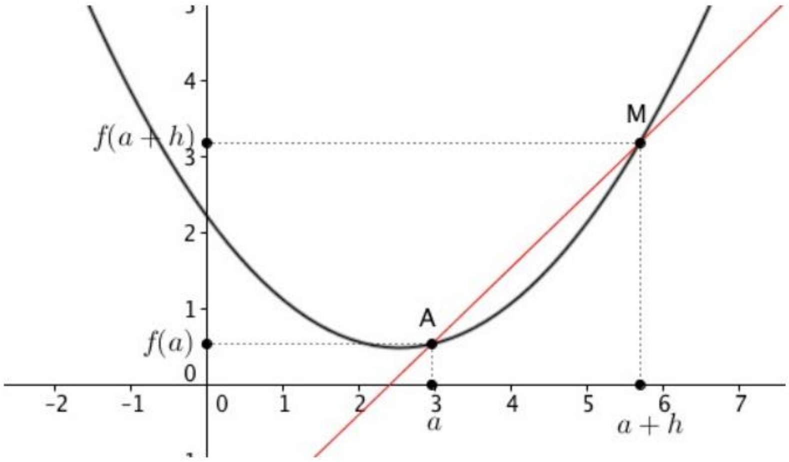
Dans cette partie, f désigne une fonction définie au moins sur un intervalle I, C_f désigne sa courbe représentative dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et a et b désignent deux réels appartenant à I avec $a \neq b$.

1 – Taux de variation :

Définition : Le **taux de variation de la fonction f entre a et b** est le quotient $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

En posant $b = a + h$, avec h un réel non nul, ce quotient s'écrit aussi $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$.

2 - Interprétation graphique du taux de variation :



Notons A le point de coordonnées (a ; f(a)) et M le point de coordonnées (a + h ; f (a + h)).
Le **coefficient directeur de la sécante (AM)** est égal à $\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(a + h) - f(a)}{a + h - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$

On a ainsi la propriété suivante :

Propriété : Le **taux de variation de la fonction f entre a et b** est égal au coefficient directeur de la sécante (AM).

3 - Nombre dérivé :

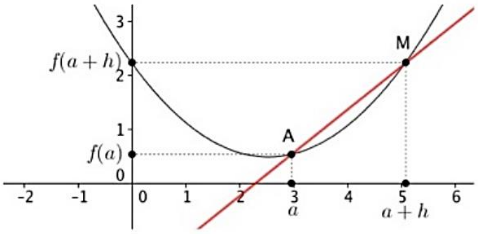
Définition : Supposons que pour les valeurs de h de plus en plus proches de zéro (mais toujours avec $h \neq 0$), les nombres $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ deviennent de plus en proches d'un nombre réel fixé noté l.
Alors on dit que la fonction f est **dérivable en a** et que **l est le nombre dérivé** de f en a.
Ce nombre dérivé est noté $f'(a)$.

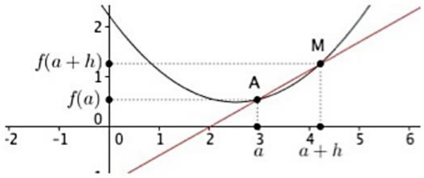
Remarque : On peut alors noter $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$

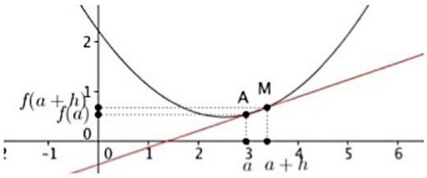
4 - Interprétation graphique du nombre dérivé :

On suppose ici que la fonction f est dérivable en un réel a de l'intervalle I.

Définition : La droite qui passe par le point A(a ; f(a)) et dont le coefficient directeur est le réel f '(a) est la **tangente** à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.







Remarque : Autrement dit, quand il existe, f '(a) est le **coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.**

Propriété : L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Démonstration : Nommons Ta cette tangente. Par définition, f '(a) est le coefficient directeur de T_a, donc il existe un réel b tel que l'équation de T_a soit $y = f'(a)x + b$.
Or $A(a ; f(a)) \in T_a$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de T_a, c'est-à-dire
$y_A = f'(a)x_A + b$, d'où $f(a) = f'(a) \times a + b$, donc $b = f(a) - af'(a)$.
L'équation de T_a est donc : $T_a : y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$, soit $T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

II] Dérivées des fonctions usuelles :

1 - Fonction dérivée :

Définition : Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle I.
La fonction **f est dérivable sur I** si et seulement si pour tout réel $a \in I$, f est dérivable en a.
La fonction définie sur I qui, à tout réel x de I, associe le nombre dérivé de f en x est appelée la **fonction dérivée** de f . Cette fonction est notée **f '**.

2 - Dérivée d'une fonction constante :

Propriété : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto k$, $k \in \mathbb{R}$.
Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$.

Démonstration : Soit x un réel. Calculons le taux de variations de f entre x et x + h, avec $h \neq 0$.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{k - k}{h} = 0$$

Ainsi, quand h tend vers 0, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ tend vers $0 \in \mathbb{R}$.
Donc f est dérivable en x.
Or ceci est vrai pour tout réel x, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a alors, pour tout réel x, $f'(x) = 0$.

3 - Dérivée d'une fonction affine :

Propriété : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto ax + b$, $(a ; b) \in \mathbb{R}^2$ et a non nul.
Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{f'(x) = a}$.

Démonstration : Soit $f(x) = ax + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
Pour $h \neq 0$, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} = \frac{ax + ah + b - ax - b}{h} = \frac{ah}{h} = a$
La limite quand $h \to 0$ est donc a.
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a$.

4 - Dérivée de la fonction carrée :

Propriété : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2$.
Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{f'(x) = 2x}$.

Démonstration : Calculons le nombre dérivé de la fonction f en un nombre réel quelconque x.
Pour $h \neq 0$: $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h$
Or : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (2x + h) = 2x$

Pour tout nombre a, on associe le nombre dérivé de la fonction f égal à 2x.
On a donc défini sur $\mathbb{R}$ une fonction, notée f ' dont l'expression est $f'(x) = 2x$.
Cette fonction s'appelle la fonction dérivée de f.

5 - Dérivée de la fonction cube :

Propriété : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^3$.
Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{f'(x) = 3x^2}$.

Pré-requis utile pour la démonstration :
Pour tous réels a et b, on a :
$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
En effet :
$(x+y)^3 = (x+y)^2(x+y)$
$(x+y)^3 = (x^2 + 2xy + y^2)(x+y)$
$(x+y)^3 = x^3 + x^2y + 2x^2y + 2xy^2 + xy^2 + y^3$
$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Démonstration : Soit x un réel. Calculons le taux de variations de f entre x et x + h, avec $h \neq 0$.
$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$
Or : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 = 3x^2$

Donc f est dérivable en x. Or ceci est vrai pour tout réel x, donc f est dérivable sur R.
On a alors, pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2$.

6 - Dérivée de la fonction inverse :

Propriété : Soit f une fonction définie sur ℝ par $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

Alors f est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$, et $\forall x \in R^*$, $\mathbf{f'(x) = -\frac{1}{x^2}}$.

Démonstration : Pour la fonction inverse.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ par $f(x)= \frac{1}{x}$.

Démontrons que pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, on a : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Pour $h \neq 0$ et $h \neq x$ tel que $x + h \neq 0$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = -\frac{1}{x(x+h)}$$

Or : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\left(-\frac{1}{x(x+h)}\right) = -\frac{1}{x^2}$

Pour tout nombre x, on associe le nombre dérivé de la fonction f égal à $-\frac{1}{x^2}$.

Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, on a : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

7 - Dérivées des fonctions de la forme $x \mapsto x^n$:

Propriété : Soit $n \in N$ et soit f la fonction définie sur ℝ par $f : x \mapsto x^n$.
Alors f est dérivable sur ℝ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{f'(x) = nx^{n-1}}$.

8 - Dérivée de la fonction racine carrée :

Propriété : Soit $n \in N$ et soit f la fonction définie sur ℝ par $f : x \mapsto \sqrt{x}$

Alors f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $\mathbf{f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$

Démonstration :

Montrons que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$:

Soit x un réel de $]0\,;+\infty[$.

Calculons le taux de variations de f entre x et $x + h$, avec $h \neq 0$ tel $x + h \in]0\,;+\infty[$:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+h}^2-\sqrt{x}^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

Or : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \in R$ car $x \in]0\,;+\infty[$.

Donc f est dérivable en x.

Or ceci est vrai pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$, donc f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

On a alors, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Montrons que f n'est pas dérivable en 0 :

Calculons pour cela le taux de variations de f entre 0 et $0 + h$ avec $h \neq 0$ tel que $0 + h \in [0\,;+\infty[$:

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}\times\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

Or : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ tend vers un quotient dont le dénominateur serait nul, ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$.

Or f est dérivable en 0 si et seulement si $\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ tend vers un nombre réel.

Donc f n'est pas dérivable en 0.

9 - Dérivée de la fonction valeur absolue :

Propriété : Soit $n \in N$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$

Alors la fonction f est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$ et on a $\boldsymbol{f'(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}}$

En particulier, la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Démonstration :

Montrons que f n'est pas dérivable en 0 :

Posons, pour tout réel h non nul, $t(h) = \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$. On a alors $t(h) = \frac{|0+h|}{h} = \frac{h}{h}$

Si $h > 0$, $t(h) = \frac{h}{h} = 1$, mais si $h < 0$, $t(h) = \frac{-h}{h} = -1$.

Ainsi, selon si h est positif ou négatif, le taux de variations de f en 0 tend vers deux réels différents, ce qui est contraire à la définition de la dérivabilité en un réel. Donc f n'est pas dérivable en 0.

Montrons que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$:

Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = |x| = x$.

Or la fonction $x \mapsto x$ est une fonction affine dérivable sur R et dont la dérivée est $x \mapsto 1$.

Donc f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1$.

Montrons que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$:

Pour tout réel $x < 0$, $f(x) = |x| = -x$.

Or la fonction $x \mapsto -x$ est une fonction affine dérivable sur R et dont la dérivée est $x \mapsto -1$.

Donc f est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et pour tout $x < 0$, $f'(x) = -1$.

10 - Tableau récapitulatif des dérivées des fonctions usuelles :

Fonction f	D_f	Dérivée f '	$D_{f'}$
$f(x) = k, k \in R$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$, avec $a, b \in R$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \in N$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$

$f(x) = \frac{1}{x^n}$ $n \geq 1$ entier	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0\ ;\ +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\ ;+\infty[$
$\lvert x \rvert$	$\mathbb{R}$	$\begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$

III] Dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient :

1 - Dérivée d'une somme :

Propriété : Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.
Alors la fonction $u + v$ est définie et dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$.

Démonstration : Soit x un réel de I.
Calculons le taux de variations de la fonction $u + v$ entre x et $x + h$, avec $h \neq 0$ tel que $x + h \in I$:

$$\frac{(u+v)(x+h) - (u+v)(x)}{h} = \frac{u(x+h) + v(x+h) - u(x) - v(x)}{h} = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$$

Or u est dérivable sur I, donc en x, donc quand h tend vers 0, $\frac{u(x+h) - u(x)}{h}$ tend vers $u'(x) \in R$.

De même, v est dérivable sur I, donc en x, donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h}$ tend vers $v'(x) \in R$.

Ainsi, $\frac{(u+v)(x+h) - (u+v)(x)}{h}$ tend vers $u'(x) + v'(x) \in R$.

Donc $u + v$ est dérivable en x. Or ceci est vrai pour tout réel x de I, donc $u + v$ est dérivable sur I et, $(u + v)' = u' + v'$.

2 – Dérivée de ku :

Propriété : Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et k un réel.
Alors la fonction $ku : x \mapsto k \times u(x)$ est définie et dérivable sur I et $(ku)' = ku'$.

Démonstration :
Soit x un réel de I.
Calculons le taux de variations de la fonction ku entre x et $x + h$, avec $h \neq 0$ tel que $x + h \in I$:

$$\frac{(ku)(x+h) - (ku)(x)}{h} = \frac{ku(x+h) + ku(x)}{h} = \frac{k(u(x+h)) - u(x)}{h} = k \times \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

Or u est dérivable sur I, donc en x, donc quand h tend vers 0, $\frac{u(x+h) - u(x)}{h}$ tend vers $u'(x) \in R$.

Ainsi, quand h tend vers 0, $\frac{(ku)(x+h) - (ku)(x)}{h}$ tend vers $k \times u'(x) \in R$.

Donc ku est dérivable en x. Or ceci est vrai pour tout réel x de I, donc ku est dérivable sur I et $(ku)' = ku'$.

3 - Dérivée d'un produit :

Propriété : Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.
Alors la fonction $uv : x \mapsto u(x) \times v(x)$ est définie et dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

Démonstration :

Soit x un réel de I.

Calculons le taux de variations de la fonction uv entre x et $x+h$, avec $h \neq 0$ tel que $x+h \in I$:

$$\begin{aligned}\frac{(uv)(x+h)-(uv)(x)}{h} &= \frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h} \\ &= \frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x+h)+u(x)v(x+h)-u(x)v(x)}{h} \\ &= \frac{u(x+h)-u(x)}{h}\,v(x+h)+\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\,u(x)\end{aligned}$$

Or u est dérivable sur I, donc en x, donc quand h tend vers 0, tend vers $u'(x) \in \mathbb{R}$.

De même, v est dérivable sur I, donc en x, donc quand h tend vers 0, $\frac{v(x+h)-v(x)}{h}$ tend vers $v'(x) \in \mathbb{R}$.

Enfin, on admet que si h tend vers 0, alors $v(x+h)$ tend vers $v(x)$.

Ainsi, quand h tend vers 0, $\frac{(uv)(x+h)-(uv)(x)}{h}$ tend vers $u'(x)v(x)+v'(x)u(x) \in \mathbb{R}$.

Donc uv est dérivable en x. Or ceci est vrai pour tout réel x de I, donc uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

4 - Dérivée d'un quotient :

a. Dérivée de l'inverse d'une fonction non nulle :

Propriété : Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que pour tout réel x de I, $u(x) \neq 0$.

Alors la fonction $\frac{1}{u}$ est définie et dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

Démonstration :

Soit x un réel de I.

Calculons le taux de variations de la fonction $\frac{1}{u}$ entre x et $x+h$, avec $h \neq 0$ tel que $x+h \in I$:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{u(x+h)}-\frac{1}{u(x)}}{h} = \frac{\frac{u(x)}{u(x)u(x+h)}-\frac{u(x+h)}{u(x)u(x+h)}}{h} &= \frac{\frac{u(x)-u(x+h)}{x(x+h)}}{hu(x)u(x+h)} \\ &= -\frac{u(x+h)-u(x)}{h} \times \frac{1}{u(x)u(x+h)}\end{aligned}$$

Or u est dérivable sur I, donc en x, donc quand h tend vers 0, $\frac{u(x+h)-u(x)}{h}$ end vers $u'(x) \in \mathbb{R}$.

On admet de plus que si h tend vers 0, alors $u(x+h)$ tend vers $u(x)$.

Ainsi, quand h tend vers 0, $\frac{\frac{1}{u(x+h)}-\frac{1}{u(x)}}{h}$ tend vers $-u'(x) \times \frac{1}{u(x)\times u(x)} = -\frac{u'(x)}{u(x)^2}$

Donc $\frac{1}{u}$ est dérivable en x. Or ceci est vrai pour tout réel x de I, donc $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

b. Dérivée d'un quotient :

Propriété : Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I et telles que pour tout réel x de I, $v(x) \neq 0$.

Alors la fonction $\frac{u}{v}$ est définie et dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}$.

Démonstration :

$\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$ est dérivable sur I (via la propriété de la dérivée du produit) et :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \times \frac{1}{v}\right)' = u' \times \frac{1}{v} + u \times \left(\frac{-v'}{v^2}\right) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

5 - Dérivée de $x \mapsto g(ax+b)$:

Propriété : Soit a et b deux réels avec $a \neq 0$.
Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I et soit J un intervalle tel que, pour tout réel x de J, $ax + b$ appartient à I.
Alors la fonction f définie sur J par $f(x) = g(ax+b)$ est dérivable sur J et pour tout réel x de J,

$$\mathbf{f'(x) = a \times g'(ax+b).}$$

Démonstration :

Soit x un réel de J. Calculons le taux de variations de f entre x et $x + h$, avec $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + h \in J$.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{g(a(x+h)+b) - g(ax+b)}{h}$$
$$= \frac{g(ax+ah+b) - g(ax+b)}{h}$$
$$= \frac{a\,[g((ax+b)+ah) - g(ax+b)]}{ah}$$

En posant $H = ah$ et $X = ax + b$, ce taux de variations s'écrit alors $a \times \frac{g(X+H) - g(X)}{H}$

Or quand h tend vers 0, ah tend aussi vers 0, donc H tend également vers 0.
Or d'après l'énoncé, $x \in J$, donc $X \in I$ et la fonction g est dérivable sur I. Ainsi, quand H tend vers 0, le taux de variations de g entre X et $X + H$ tend vers $g'(X)$.
Ainsi, quand H tend vers 0, $a \times \frac{g(X+H) - g(X)}{H}$ tend vers $a \times g'(X)$, réel fixe.
Ainsi, quand h tend vers 0, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ tend vers $a \times g'(ax+b)$, réel fixe.
Donc f est bien dérivable en $x \in J$.
Or ceci est vrai pour tout réel x de J, donc f est bien dérivable sur J et pour tout réel $x \in J$, $f'(x) = a \times g'(ax+b)$.

6 - Tableau récapitulatif des opérations sur les dérivées :

Fonction f	Dérivée f '
$u + v$	$(u+v)' = u' + v'$
ku, avec k est une constante	$(ku)' = ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)' = u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$, avec $u \neq 0$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$, avec $v \neq 0$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
$g(ax+b)$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$	$a \times g'(ax+b)$

IV] Sens de variations d'une fonction :

Théorème : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.
Si $f'(x) = 0$, alors la fonction est constante.
Si $f'(x) > 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur I.
Si $f'(x) < 0$, alors la fonction f est strictement décroissante sur I.

Exemple : Déterminer les variations de la fonction f dérivable sur R :

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$$

- On calcule la dérivée : $f'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(-x + 2)$.
- On cherche les valeurs qui annulent la dérivée : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$.
- Le signe de $f'(x)$ est celui d'un trinôme du second degré.

On obtient le tableau de variation suivant :

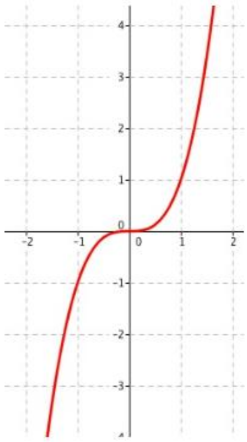
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

V] Extremum d'une fonction :

Propriété : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et soit x_0 un réel de I qui ne soit pas une borne de I. **Si $f(x_0)$ est un extremum local de f , alors $f'(x_0) = 0$.**

Remarques :

- Si $f(x_0)$ est un extremum local de f , alors la courbe représentative de f admet
au point d'abscisse x_0 une tangente horizontale (parallèle à l'axe des abscisses).
- **Attention :** La réciproque de cette propriété est fausse.



Exemple : Soit la fonction f cube définie sur R par $f(x) = x^3$:
$f'(0) = 0$ mais $f(0) = 0$ n'est pas un extremum local de f .

Il manque en effet une condition... :

Propriété : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et soit x0 un réel de I qui ne soit pas une borne de I. Si f' s'annule en x0 en changeant de signe, alors $f(x_0)$ est un extremum local de f .