Comparaison d'expressions et positions relatives

Exercice n°1 : On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 5$ et $g(x) = -2x + 7$. On note C_f et C_g leurs droites représentatives dans un repère.

1) Comparer f(x) et g(x), c'est-à-dire déterminer les solutions de $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$ et $f(x) > g(x)$.

2) En déduire la position relative de C_f et C_g : pour quelles valeurs de x, C_f est au-dessus de C_g puis en dessous, et où se croisent-elles.

Exercice n°2 : On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2$ et $g(x) = -3x - 4$. Soit C_f et C_g leurs courbes représentatives.

1) Exprimer $f(x) - g(x)$ en fonction de x.

2) Factoriser $f(x) - g(x)$.

3) Résoudre $f(x) = g(x)$ puis déterminer pour quelles valeurs de x, $f(x) \geq g(x)$.

4) En déduire la position relative de C_f et C_g.

Exercice n°3 : Étudier les positions relatives des courbes C et C' d'équations respectives :

$y = x^2 - 2x + 3$ et $y = 4x - 1$.

Exercice n°4 : Étudier les positions relatives des courbes C et C' d'équations respectives :

$y = \frac{2}{x}$ et $y = -x + 3$.

Correction

Exercice n°1 : On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 5$ et $g(x) = -2x + 7$. On note C_f et C_g leurs droites représentatives dans un repère.
1) Comparer f(x) et g(x), c'est-à-dire déterminer les solutions de $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$ et $f(x) > g(x)$.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3x - 5 = -2x + 7$
$\Leftrightarrow 3x + 2x = 7 + 5$
$\Leftrightarrow 5x = 12$
$\Leftrightarrow x = \frac{12}{5} = 2{,}4$

– Pour $x < 2{,}4$: choisissons $x = 0$, $f(0) = -5$, $g(0) = 7$ donc $f < g$.

– Pour $x > 2{,}4$: choisissons $x = 3$, $f(3) = 4$, $g(3) = 1$ donc $f > g$.

2) En déduire la position relative de C_f et C_g : pour quelles valeurs de x, C_f est au-dessus de C_g puis en dessous, et où se croisent-elles.
Les deux droites se coupent au point d'abscisse $x = 2{,}4$.
Pour $x < 2{,}4$, C_f est en dessous de C_g.
Pour $x > 2{,}4$, C_f est au-dessus de C_g.

Exercice n°2 : On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2$ et $g(x) = -3x - 4$. Soit C_f et C_g leurs courbes représentatives.
1) Exprimer $f(x) - g(x)$ en fonction de x.
$f(x) - g(x) = 2x^2 - (-3x - 4) = 2x^2 + 3x + 4$

2) Factoriser $f(x) - g(x)$.
Cette expression ne se factorise pas avec des entiers simples (discriminant) :
$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 4 = 9 - 32 = -23 < 0$
Donc : l'expression est toujours strictement positive.

3) Résoudre $f(x) = g(x)$ puis déterminer pour quelles valeurs de x, $f(x) \geq g(x)$.
Comme $\Delta < 0$, l'équation $f(x) = g(x)$ n'a pas de solution et $f(x) - g(x) > 0$ pour tout x.
Donc : $f(x) > g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4) En déduire la position relative de C_f et C_g.
La courbe C_f est toujours au-dessus de C_g, elles ne se coupent jamais.

Exercice n°3 : Étudier les positions relatives des courbes C et C' d'équations respectives :
$y = x^2 - 2x + 3$ et $y = 4x - 1$.
On résout $x^2 - 2x + 3 = 4x - 1$
$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 4 = 0$.
$\Delta = 36 - 16 = 20$.
Racines : $x = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 3 \pm 2\sqrt{5}$

– Pour $x < 3 - 2\sqrt{5}$: $x = 0$, $f(0) = 3$, $g(0) = -1$ **donc :** $f > g$.
– Entre $3 - 2\sqrt{5}$ et $3 + 2\sqrt{5}$: $x = 3$, $f(3) = 6$, $g(3) = 11$ **donc :** $f < g$.

– Pour $x > 3 + 2\sqrt{5}$: $x = 6$, $f(6) = 27$, $g(6) = 23$ **donc :** $f > g$.

Conclusion : C est au-dessus de C' avant $x = 3 - 2\sqrt{5}$ et après $x = 3 + 2\sqrt{5}$, en dessous entre les deux. Elles se coupent en deux points.

Exercice n°4 : Étudier les positions relatives des courbes C et C' d'équations respectives :
$y = \frac{2}{x}$ et $y = -x + 3$.

On résout $\frac{2}{x} = -x + 3$ avec $x \neq 0$
$\Leftrightarrow 2 = -x^2 + 3x$
$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2) = 0$ **donc :** $x = 1$ ou $x = 2$.

– Pour $x < 0$: $x = -1$, $f = -2$, $g = 4$ **donc :** $f < g$.
– Pour $0 < x < 1$: $x = 0{,}5$, $f = 4$, $g = 2{,}5$ **donc :** $f > g$.
– Pour $1 < x < 2$: $x = 1{,}5$, $f \approx 1{,}33$, $g = 1{,}5$ **donc :** $f < g$.
– Pour $x > 2$: $x = 3$, $f \approx 0{,}67$, $g = 0$ **donc :** $f > g$.

Conclusion : C et C' se coupent aux points d'abscisses $x = 1$ et $x = 2$. C est en dessous pour $x < 0$, au-dessus sur $0 < x < 1$, en dessous sur $1 < x < 2$, puis de nouveau au-dessus pour $x > 2$.