Colinéarité

Exercice n°1 :

1) Soient les vecteurs $\vec{u}\binom{4}{-6}$ et $\vec{v}\binom{-2}{3}$.
   a. Calculer le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
   b. Dire s'ils sont colinéaires et, si oui, donner la relation entre eux.

2) Soient les vecteurs $\vec{a}\binom{7}{5}$ et $\vec{b}\binom{21}{15}$.
   a. Calculer le déterminant de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
   b. Dire s'ils sont colinéaires et, si oui, donner la relation entre eux.

3) Soient les vecteurs $\vec{p}\binom{2}{-1}$ et $\vec{q}\binom{5}{4}$.
   a. Calculer le déterminant de $\vec{p}$ et $\vec{q}$.
   b. Dire s'ils sont colinéaires et, si oui, donner la relation entre eux.

4) Soient les vecteurs $\vec{x}\binom{6}{2}$ et $\vec{y}\binom{9}{-3}$.
   a. Calculer le déterminant de $\vec{x}$ et $\vec{y}$.
   b. Dire s'ils sont colinéaires et, si oui, donner la relation entre eux.

Exercice n°2 : Soient $A(1\,;-2)$, $B(4\,;1)$, $C(7\,;4)$ et $D(2\,;3)$.
Dans chaque cas, calculer les coordonnées des vecteurs suivants puis leur déterminant.
Conclure sur leur éventuelle colinéarité.
1) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
2) $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$
3) $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AC}$

Exercice n°3 : Dans chaque cas, dire si les droites (AB) et (CD) sont parallèles en justifiant par un calcul de déterminant.
1) $A(1\,;1)$, $B(4\,;3)$, $C(2\,;-1)$, $D(6\,;1)$
2) $A(-2\,;0)$, $B(0\,;4)$, $C(1\,;-3)$, $D(3\,;1)$
3) $A(0\,;-1)$, $B(3\,;5)$, $C(-1\,;2)$, $D(5\,;8)$

Exercice n°4 : Dans chaque cas, dire si les trois points sont alignés en justifiant par un calcul de déterminant.
1) $A(1\,;2)$, $B(3\,;4)$, $C(5\,;6)$
2) $A(0\,;0)$, $B(2\,;1)$, $C(3\,;5)$
3) $A(2\,;-1)$, $B(5\,;5)$, $C(8\,;11)$

Exercice n°5 : On considère les points $A(1\,;2)$ et $B(4\,;8)$.
1) Vérifier si le point $C(7\,;14)$ appartient à la droite (AB).
2) Vérifier si le point $D(2\,;5)$ appartient à la droite (AB).

Correction

Exercice n°1 :

1) Soient les vecteurs $\vec{u}\binom{4}{-6}$ et $\vec{v}\binom{-2}{3}$.

a. Calculer le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 4 \times 3 - (-6) \times (-2) = 12 - 12 = 0$

b. Dire s'ils sont colinéaires et, si oui, donner la relation entre eux.

Le déterminant est égal à 0.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
Et on remarque que $\vec{u} = -2\vec{v}$

2) Soient les vecteurs $\vec{a}\binom{7}{5}$ et $\vec{b}\binom{21}{15}$.

a. Calculer le déterminant de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

$\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = \begin{vmatrix} 7 & 21 \\ 5 & 15 \end{vmatrix} = 7 \times 15 - 5 \times 21 = 105 - 105 = 0$

b. Dire s'ils sont colinéaires et, si oui, donner la relation entre eux.

Le déterminant est égal à 0.
Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires.
Et on remarque que $\vec{b} = 3\vec{a}$

3) Soient les vecteurs $\vec{p}\binom{2}{-1}$ et $\vec{q}\binom{5}{4}$.

a. Calculer le déterminant de $\vec{p}$ et $\vec{q}$.

$\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - (-1) \times 5 = 8 + 5 = 13 \neq 0$

b. Dire s'ils sont colinéaires et, si oui, donner la relation entre eux.

Le déterminant est différent de 0.
Les vecteurs ne sont pas colinéaires.

4) Soient les vecteurs $\vec{x}\binom{6}{2}$ et $\vec{y}\binom{9}{-3}$.

a. Calculer le déterminant de $\vec{x}$ et $\vec{y}$.

$\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 6 \times (-3) - 9 \times 2 = -18 - 18 = -36 \neq 0$

b. Dire s'ils sont colinéaires et, si oui, donner la relation entre eux.

Le déterminant est différent de 0.
Les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Exercice n°2 : Soient $A(1\,;-2)$, $B(4\,;1)$, $C(7\,;4)$ et $D(2\,;3)$.
Dans chaque cas, calculer les coordonnées des vecteurs suivants puis leur déterminant.
Conclure sur leur éventuelle colinéarité.

1) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 1-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 7-1 \\ 4-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 3 \times 6 - 3 \times 6 = 18 - 18 = 0$

Le déterminant est égal à 0.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
Et on remarque que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$

2) $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ 3 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 7 - 4 \\ 4 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{BC}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - 5 \times 3 = 3 - 15 = -12 \neq 0$

Le déterminant est différent de 0.
Les vecteurs ne sont pas colinéaires.

3) $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 2 - 4 \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 7 - 1 \\ 4 - (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{BD} ; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -2 \times 6 - 6 \times 2 = -12 - 12 = -24 \neq 0$

Le déterminant est différent de 0.
Les vecteurs ne sont pas colinéaires.

<u>Exercice n°3 :</u> Dans chaque cas, dire si les droites (AB) et (CD) sont parallèles en justifiant par un calcul de déterminant.
1) $A(1 ; 1)$, $B(4 ; 3)$, $C(2 ; -1)$, $D(6 ; 1)$
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 6 - 2 \\ 1 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - 4 \times 2 = 6 - 8 = -2 \neq 0$

Le déterminant est différent de 0.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.
Donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

2) $A(-2 ; 0)$, $B(0 ; 4)$, $C(1 ; -3)$, $D(3 ; 1)$
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 - (-2) \\ 4 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 1 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 4 \times 2 = 8 - 8 = 0$

Le déterminant est égal à 0.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
Donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

3) A(0 ; − 1), B(3 ; 5), C(− 1 ; 2), D(5 ; 8)
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 - 0 \\ 5 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 5 - (-1) \\ 8 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 3 \times 6 - 6 \times 6 = 18 - 36 = -18 \neq 0$

Le déterminant est différent de 0.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.
Donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

Exercice n°4 : Dans chaque cas, dire si les trois points sont alignés en justifiant par un calcul de déterminant.
1) A(1 ; 2), B(3 ; 4), C(5 ; 6)
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 4 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ 6 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 4 \times 2 = 8 - 8 = 0$

Le déterminant est égal à 0.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
Donc les points A, B et C sont alignés.

2) A(0 ; 0), B(2 ; 1), C(3 ; 5)
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 - 0 \\ 5 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 3 \times 1 = 10 - 3 = 7 \neq 0$

Le déterminant est différent de 0.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
Donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

3) $A(2\,;-1)$, $B(5\ ;5)$, $C(8\ ;11)$

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 5 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 8 - 2 \\ 11 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 3 \times 12 - 6 \times 6 = 36 - 36 = 0$

Le déterminant est égal à 0.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
Donc les points A, B et C sont alignés.

<u>Exercice n°5 :</u> On considère les points A(1 ; 2) et B(4 ; 8).
1) Vérifier si le point C(7 ; 14) appartient à la droite (AB).

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 8 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 7 - 1 \\ 14 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 3 \times 12 - 6 \times 6 = 36 - 36 = 0$

Le déterminant est égal à 0.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
Donc C appartient à la droite (AB).

2) Vérifier si le point D(2 ; 5) appartient à la droite (AB).

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 8 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ 5 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 3 - 1 \times 6 = 9 - 6 = 3 \neq 0$

Le déterminant est différent de 0.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires.
Donc D n'appartient pas à la droite (AB).