Calculer un angle

Exercice n°1 : On donne $\| \vec{u} \| = 3$, $\| \vec{v} \| = 4$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$.
Donner une valeur en degrés de l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$et $\vec{v}$.

Exercice n°2 : Déterminer une valeur en degrés de l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\| \vec{u} \| = 5$, $\| \vec{v} \| = 2$ et
$\vec{u} \cdot \vec{v} = -5$.

Exercice n°3 : Déterminer une valeur en degrés, arrondie à 0,1 près, de l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que
$\| \vec{u} \| = \sqrt{5}$, $\| \vec{v} \| = \sqrt{10}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$.

Exercice n°4 : On donne $\| \vec{u} \| = 1$, $\| \vec{v} \| = \sqrt{2}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.
Donner une valeur en degrés de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice n°5 : Pour les points A(1 ; 2), B(4 ; 5) et C(0 ; 3), calculer une valeur approchée à 0,1° près de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice n°6 : Pour les points A(-1 ; 0), B(2 ; 2) et C(3 ; -1), calculer une valeur approchée à 0,1° près de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice n°7 : Pour les points A(0 ; 0), B(3 ; 1) et C(1 ; 4), calculer une valeur approchée à 0,1° près de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice n°8 : Pour les points A(2 ; -1), B(5 ; 1) et C(1 ; 2), calculer une valeur approchée à 0,1° près de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice n°9 : On considère les points O(0 ; 0), A(3 ; 1) et B(1 ; 3).
Déterminer une valeur en degrés de l'angle $\widehat{AOB}$.

Exercice n°10 : On considère les points A(1 ; 1), O(0 ; 0) et B(-2 ; 2).
Déterminer une valeur en degrés de l'angle $\widehat{AOB}$.

Correction

Rappel :
Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \| \vec{u} \| \times \| \vec{v} \| \times \cos(\theta)$

où θ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Ainsi : $\cos(\theta) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$
On en déduit θen degrés en calculant arccos de cette valeur (en prenant soin de la plage : $\theta \in [0°; 180°]$).

Exercice n°1 : On donne $\| \vec{u} \| = 3$, $\| \vec{v} \| = 4$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$.
Donner une valeur en degrés de l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$et $\vec{v}$.

$$\cos(\theta) = \frac{6}{3 \times 4} = \frac{6}{12} = 0{,}5$$

Donc $\theta = \arccos(0{,}5) = 60°$.

Exercice n°2 : Déterminer une valeur en degrés de l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\| \vec{u} \| = 5$, $\| \vec{v} \| = 2$ et
$\vec{u} \cdot \vec{v} = -5$.

$$\cos(\theta) = \frac{-5}{5 \times 2} = \frac{-5}{10} = -0{,}5$$

Donc $\theta = \arccos(-0{,}5) = 120°$(car cos(120°) = -0,5).

Exercice n°3 : Déterminer une valeur en degrés, arrondie à 0,1 près, de l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que
$\| \vec{u} \| = \sqrt{5}$, $\| \vec{v} \| = \sqrt{10}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5$.

$$\cos(\theta) = \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7071$$

Donc $\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 45{,}0°$
(arrondi à 0,1 près).

Exercice n°4 : On donne $\| \vec{u} \| = 1$, $\| \vec{v} \| = \sqrt{2}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.
Donner une valeur en degrés de l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\cos(\theta) = \frac{1}{1 \times \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7071$$

Donc $\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45°$

Exercice n°5 : Pour les points A(1 ; 2), B(4 ; 5) et C(0 ; 3), calculer une valeur approchée à 0,1° près de l'angle $\widehat{BAC}$.
Calculons les vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = (4-1; 5-2) = (3; 3)$$
$$\overrightarrow{AC} = (0-1; 3-2) = (-1; 1)$$

Leurs normes :

$$\| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$
$$\| \overrightarrow{AC} \| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$$

Produit scalaire :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times (-1) + 3 \times 1 = -3 + 3 = 0$$

Donc $\cos(\theta) = \frac{0}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = 0$, d'où $\theta = 90°$.

__Exercice n°6 :__ Pour les points A(-1 ; 0), B(2 ; 2) et C(3 ; -1), calculer une valeur approchée à 0,1° près de l'angle $\widehat{BAC}$.

Vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = (2-(-1), 2-0) = (3, 2)$$
$$\overrightarrow{AC} = (3-(-1), -1-0) = (4, -1)$$

Produit scalaire :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 4 + 2 \times (-1) = 12 - 2 = 10$$

Normes :

$$\| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \approx 3{,}60555$$
$$\| \overrightarrow{AC} \| = \sqrt{4^2+(-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17} \approx 4{,}12311$$

Cosinus de l'angle :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\| \overrightarrow{AB} \| \cdot \| \overrightarrow{AC} \|} = \frac{10}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{17}} = \frac{10}{\sqrt{221}} \approx 0{,}67267$$

Angle en degrés :

$$\widehat{BAC} = \arccos(0{,}67267) \approx 47{,}7°$$

__Exercice n°7 :__ Pour les points A(0 ; 0), B(3 ; 1) et C(1 ; 4), calculer une valeur approchée à 0,1° près de l'angle $\widehat{BAC}$.

Vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = (3-0, 1-0) = (3, 1)$$
$$\overrightarrow{AC} = (1-0, 4-0) = (1, 4)$$

Produit scalaire :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 1 + 1 \times 4 = 3 + 4 = 7$$

Normes :

$$\| \overrightarrow{AB} \| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10} \approx 3{,}16228$$
$$\| \overrightarrow{AC} \| = \sqrt{1^2+4^2} = \sqrt{17} \approx 4{,}12311$$

Cosinus de l'angle :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{7}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{17}} = \frac{7}{\sqrt{170}} \approx 0{,}53666$$

Angle en degrés :

$$\widehat{BAC} = \arccos(0{,}53666) \approx 57{,}5°$$

Exercice n°8 : Pour les points A(2 ; -1), B(5 ; 1) et C(1 ; 2), calculer une valeur approchée à 0,1° près de l'angle $\widehat{BAC}$.

Vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} = (5-2,\ 1-(-1)) = (3,\ 2)$$
$$\overrightarrow{AC} = (1-2,\ 2-(-1)) = (-1,\ 3)$$

Produit scalaire :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 3\times(-1) + 2\times 3 = -3+6 = 3$$

Normes :

$$\parallel \overrightarrow{AB} \parallel = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}60555$$
$$\parallel \overrightarrow{AC} \parallel = \sqrt{(-1)^2+3^2} = \sqrt{10} \approx 3{,}16228$$

Cosinus de l'angle :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{3}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{130}} \approx 0{,}26312$$

Angle en degrés :

$$\widehat{BAC} = \arccos(0{,}26312) \approx 74{,}8°$$

Exercice n°9 : On considère les points O(0 ; 0), A(3 ; 1) et B(1 ; 3).
Déterminer une valeur en degrés de l'angle $\widehat{AOB}$.

Vecteurs :

$$\overrightarrow{OA} = (3-0,\ 1-0) = (3,\ 1)$$
$$\overrightarrow{OB} = (1-0,\ 3-0) = (1,\ 3)$$

Produit scalaire :

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = 3\times 1 + 1\times 3 = 3+3 = 6$$

Normes :

$$\parallel \overrightarrow{OA} \parallel = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10} \approx 3{,}16228$$
$$\parallel \overrightarrow{OB} \parallel = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10} \approx 3{,}16228$$

Cosinus de l'angle :

$$\cos(\widehat{AOB}) = \frac{6}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}} = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

Angle en degrés :

$$\widehat{AOB} = \arccos(0{,}6) \approx 53{,}1°$$

<u>Exercice n°10 :</u> On considère les points A(1 ; 1), O(0 ; 0) et B(-2 ; 2).
Déterminer une valeur en degrés de l'angle $\widehat{AOB}$.

Vecteurs :

$$\overrightarrow{OA} = (1-0; 1-0) = (1; 1)$$
$$\overrightarrow{OB} = (-2-0; 2-0) = (-2; 2)$$

Normes :

$$\| \overrightarrow{OA} \| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$\| \overrightarrow{OB} \| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Produit scalaire :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \times (-2) + 1 \times 2 = -2 + 2 = 0$$

Donc $\cos(\theta) = 0$, d'où $\theta = 90°$.