Suites définies par une relation de récurrence

Exercice n°1 : On considère la suite (u_n) définie par la récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$$

Calculer u_1, u_2, u_3.

Exercice n°2 : On considère la suite (u_n) définie par la récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$$

Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

Exercice n°3 : On considère la suite (u_n) définie par la récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = {u_n}^2 \end{cases}$$

Calculer les 5 premiers termes de la suite.

Exercice n°4 : On considère la suite (u_n) définie par la récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

Déterminer les termes suivants.

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6

Exercice n°5 : On considère la suite (u_n) définie par la récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases}$$

Déterminer les termes suivants.

Exercice n°6 : Une ludothèque possède 120 jeux de société en 2020.
Chaque année, elle donne 6 % de ses jeux à une œuvre de charité puis achète 15 nouveaux jeux.
1) Combien aura-t-elle de jeux en 2021 ?
2) On note u_n le nombre de jeux de la ludothèque en 2020 + n (donc $u_0 = 120$).
Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.

Correction

Exercice n°1 : On considère la suite (u_n) définie par la récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$$

Calculer u_1, u_2, u_3.

$u_1 = u_0 + 3 = 2 + 3 = 5$
$u_2 = u_1 + 3 = 5 + 3 = 8$
$u_3 = u_2 + 3 = 8 + 3 = 11$

Exercice n°2 : On considère la suite (u_n) définie par la récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$$

Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

$u_1 = 2u_0 - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$
$u_2 = 2u_1 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$
$u_3 = 2u_2 - 1 = 2 \times 9 - 1 = 17$
$u_4 = 2u_3 - 1 = 2 \times 17 - 1 = 33$
$u_5 = 2u_4 - 1 = 2 \times 33 - 1 = 65$

Exercice n°3 : On considère la suite (u_n) définie par la récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = {u_n}^2 \end{cases}$$

Calculer les 5 premiers termes de la suite.

$u_1 = {u_0}^2 = 2^2 = 4$
$u_2 = {u_1}^2 = 4^2 = 16$
$u_3 = {u_2}^2 = 16^2 = 256$
$u_4 = {u_3}^2 = 256^2 = 65\,536$
$u_5 = {u_4}^2 = 65\,536^2 = 4\,294\,967\,296$

Exercice n°4 : On considère la suite (u_n) définie par la récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

Déterminer les termes suivants.

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
-5	$-\frac{1}{5}$	-5	$-\frac{1}{5}$	-5	$-\frac{1}{5}$	-5

Exercice n°5 : On considère la suite (u_n) définie par la récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases}$$

Déterminer les termes suivants.

$$u_1 = \frac{3u_0 + 1}{u_0 + 2} = \frac{3 \times 2 + 1}{2 + 2} = \frac{7}{4}$$

$$u_2 = \frac{3u_1 + 1}{u_1 + 2} = \frac{3 \times \frac{7}{4} + 1}{\frac{7}{4} + 2} = \frac{\frac{21}{4} + \frac{4}{4}}{\frac{7}{4} + \frac{8}{4}} = \frac{\frac{25}{4}}{\frac{15}{4}} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}$$

<u>Exercice n°6 :</u> Une ludothèque possède 120 jeux de société en 2020.
Chaque année, elle donne 6 % de ses jeux à une œuvre de charité puis achète 15 nouveaux jeux.
1) Combien aura-t-elle de jeux en 2021 ?
En 2020 la ludothèque a $u_0 = 120$ jeux.
Elle donne 6% de ses jeux : 6% de 120 est : $120 \times \frac{6}{100} = 120 \times 0{,}06 = 7{,}2$ jeux.
Après le don, il reste $120 - 7{,}2 = 112{,}8$ jeux.
Ensuite elle achète 15 jeux, donc au total en 2021 :
$u_1 = 112{,}8 + 15 = 127{,}8$
Réponse : **127,8 jeux** (si on travaille avec des nombres réels).
Si l'on veut un nombre entier de jeux (pratique), on arrondira : **128 jeux** en arrondissant à l'entier le plus proche.

2) On note u_n le nombre de jeux de la ludothèque en $2020 + n$ (donc $u_0 = 120$).
Donner l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n.
Procédé chaque année : on retire 6% des jeux puis on ajoute 15.
Retirer 6 revient à conserver $100\% - 6\% = 94\%$ des jeux, c'est-à-dire multiplier par 0,94.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$u_n + 1 = 0{,}94u_n + 15$
Avec $u_0 = 120$