Suites numériques

I] Définition :

Définition : Une **suite numérique** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une succession de nombres réels ordonnés. À un rang donné n, on associe un nombre réel u_n.

$$\begin{aligned}(u_n) : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u_n\end{aligned}$$

u_n est appelé le terme général de la suite (u_n).

Exemples :

Soit la suite (u_n) : 1, 4, 6, 11, 13, 26, . . .

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
1	4	6	11	13	26

Soit la suite (v_n) : 3, 7, 12, 25, 38, 56, . . .

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
3	7	12	25	38	56

Soit la suite (w_n) : 1, 1, 2, 3, 5, 8, . . .
(Suite de Fibonacci)

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
1	1	2	3	5	8

Remarque : La suite u est aussi notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou plus simplement (u_n).
A ne pas confondre avec le terme général u_n, qui est un réel (un élément de la suite), alors que (u_n) désigne une suite.
(**Analogie :** est la fonction, est la valeur de la fonction en .)

II] Définir une suite :

Une suite peut être définie de plusieurs façons différentes.

1 - De façon explicite :

Définition : Une **suite (u_n) est définie de façon explicite** si le terme général u_n s'exprime en fonction de n : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$.

Exemple : Soit la suite (u_n) telle que : $u_n = 3n + 5$.
On a : $u_{10} = 3 \times 10 + 5 = 35$

Avantage : Lorsqu'une suite est définie de manière explicite, on peut calculer directement n'importe quel terme de la suite, sans avoir à connaître les termes précédents.
Problème : Dans la plupart des modélisations à l'aide de suites (évolution d'une population par exemple), les suites ne sont pas définies de façon explicite mais...

2 – Par récurrence :

Définition : Lorsque le terme général u_n dépend du terme précédent, **on définit alors la suite par une relation de récurrence et par un premier terme.**

$$u_0 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n)$$

Exemple : On donne la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$.
Déterminer u_1, u_2, u_3, u_4.
$u_1 = 3u_0 - 2 = 3 \times 2 - 2 = 4$
$u_2 = 3u_1 - 2 = 3 \times 4 - 2 = 10$
$u_3 = 3u_2 - 2 = 3 \times 10 - 2 = 28$
$u_4 = 3u_3 - 2 = 3 \times 28 - 2 = 82$

Problème de ce mode de génération :
Pour calculer un terme, il faut connaître le précédent, et par suite, il faut donc connaître tous les termes précédents. Dans l'exemple précédent, pour calculer u_9, il faut calculer u_8, u_7, etc, etc...

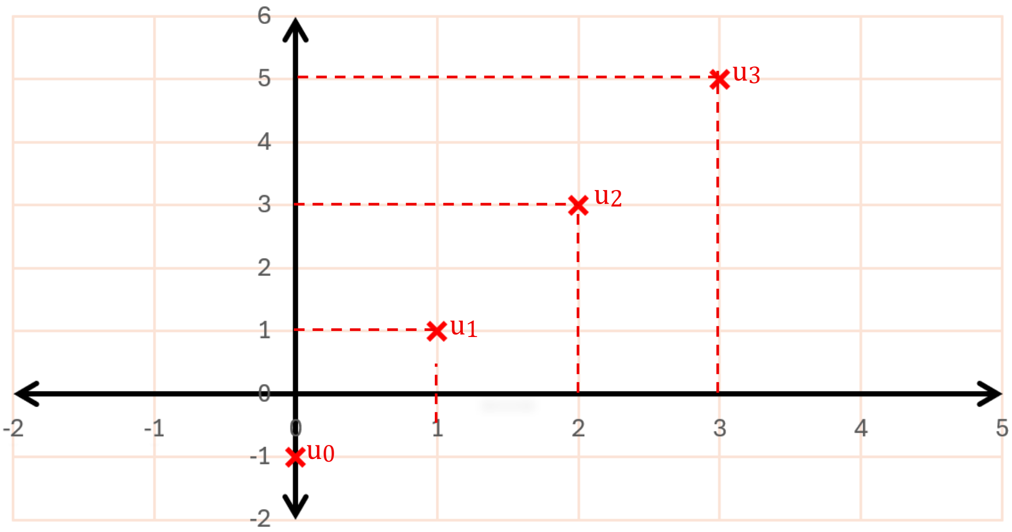
III] Représentation graphique d'une suite :

Dans un repère du plan, on représente une suite par un **nuage de points de coordonnées $(n\,;u_n)$.**

Exemple : On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 2n - 1$.

Méthodologie :
On construit le tableau de valeurs avec les premiers termes de la suite.

n	u_n
0	– 1
1	1
2	3
3	5



IV] Sens de variations d'une suite :

1 – Définition :

Définition : Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.
- On dit que la suite (u_n) est **croissante** lorsque pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$.
- On dit que la suite (u_n) est **décroissante** lorsque pour tout entier naturel n, $u_n \geq u_{n+1}$.

Remarque : On définit de même une suite strictement croissante ou strictement décroissante en utilisant une inégalité stricte (< ou >).

2 - Comment étudier le sens de variation d'une suite ?

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$. Pour étudier le sens de variation de la suite (u_n), on peut procéder de plusieurs manières :

1ère méthode : Etude du signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Propriété : Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.

- Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors la suite u est **croissante**.
- Si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors la suite u est **décroissante**.

Remarque : Il faut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n (c'est-à-dire sans chercher à remplacer n par un entier au choix !!). Ce n'est pas parce que $u_1 - u_0 > 0$ et que $u_2 - u_1 > 0$ (etc) que l'on peut conclure que cela va rester vrai pour tous les entiers naturels n et que u est croissante !

Exemple : Soit (u_n), la suite définie par $u_n = n^2$.
Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 > 0$ (car $n > 0$).
La suite (u_n) est donc croissante.

2ème méthode : Comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ à termes strictement positifs.

- Si pour tout entier naturel n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la suite u est **croissante**.
- Si pour tout entier naturel n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors la suite u est **décroissante**.
- Si pour tout entier naturel n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, alors la suite u est **constante**.

Exemple : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{2^n}{n}$

Pour tout $n \geq 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{2^n} = \frac{2n}{n+1} \geq 1$

Ainsi, la suite (u_n) est croissante.

3ème méthode : Etude du sens de variation d'une fonction.

Propriété : Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ définie de manière explicite sous la forme $u_n = f(n)$, avec f une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$. La suite (u_n) et la fonction f ont le même sens de variation.

- Si la **fonction f est croissante** sur $[0 ; +\infty[$, alors la **suite u est croissante**.
- Si la **fonction f est décroissante** sur $[0 ; +\infty[$, alors la **suite u est décroissante**.

Exemple : On a $u_n = f(n)$ où $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$.
La fonction f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$
La fonction f est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$. On déduit que la suite (u_n) est aussi strictement croissante.

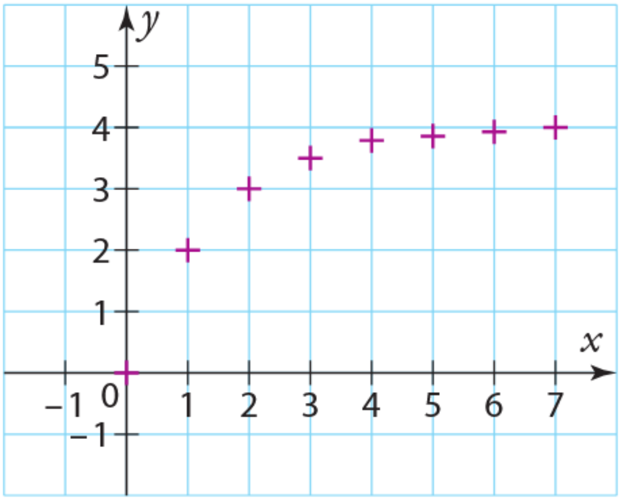
V] Limite d'une suite :

Définition :

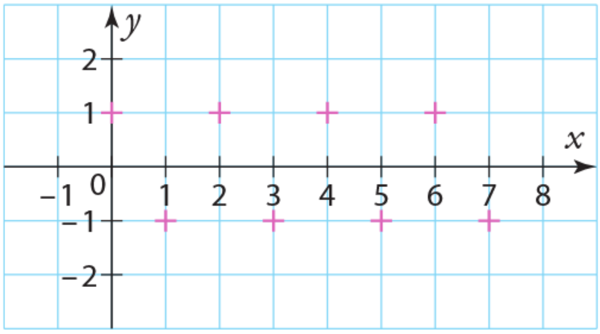
- Une suite est **convergente** quand ses termes se rapprochent d'un nombre précis quand n devient très grand. Ce nombre, c'est **la limite** de la suite.

➢ Une suite est **divergente** quand ses termes ne se rapprochent d'aucun nombre en grandissant.

Exemples :



On observe que les termes de (u_n) semblent se rapprocher de 4.
On peut alors penser que 4 est la limite de la suite (u_n), que l'on note : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 4$



Soit la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$.
Les termes alternent entre 1 et – 1.
Ils ne se rapprochent d'aucun nombre unique.
La suite **n'a pas de limite**, donc elle est **divergente.**