Suites arithmétiques et suites géométriques

I] Suites arithmétiques :

1 - Définition :

Définition : Une suite (u_n) est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre r est appelé **raison** de la suite.

Exemple : Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $r = 5$. Déterminer u_1, u_2, u_3, u_4.
$u_1 = u_0 + r = 2 + 5 = 7$
$u_2 = u_1 + r = 7 + 5 = 12$
$u_3 = u_2 + r = 12 + 5 = 17$
$u_4 = u_3 + r = 17 + 5 = 22$

2 - Comment reconnaît-on une suite arithmétique ?

Propriété : Une **suite est arithmétique** lorsque **la différence entre deux termes consécutifs est constante**. On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u_{n+1} - u_n = r}$.

Exemple n°1 : Montrer que la suite définie par : $u_n = 2n + 3$ est arithmétique.
On calcule la différence entre deux termes consécutifs quelconques :

$$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 3 - (2n+3) = 2n + 2 + 3 - 2n - 3 = 2$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2$.
La suite (u_n) est une suite arithmétique de **raison** 2 et de **premier terme** $u_0 = 3$.

Exemple n°2 : Montrer que la suite définie par : $v_n = n^2 + 2$ n'est pas arithmétique.
On calcule la différence entre deux termes consécutifs quelconques :

$$v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 + 2 - (n^2 + 2) = n^2 + 2n + 1 + 2 - n^2 - 2 = 2n + 1$$

Cette différence dépend de , elle **n'est pas constante**.
La suite (v_n) n'est pas une suite arithmétique.

3 - Expression du terme général en fonction de n :

Propriété : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$, définie sur $\mathbb{N}$..
Alors pour tous entiers naturels n et p, on a :

$$\mathbf{u_n = u_p + (n - p)r}$$

En particulier, si u est définie à partir du rang 0, on a :

$$\mathbf{u_0 = u_0 + nr}$$

Démonstration : La suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 vérifie la relation $u_{n+1} = u_n + r$.
En calculant les premiers termes :
$u_1 = u_0 + r$
$u_2 = u_1 + r = u_0 + 2r$
$u_3 = u_2 + r = u_0 + 3r$

…
$u_n = u_{n-1} + r = = u_0 + nr$

Méthodologie : Comment déterminer la raison et le premier terme d'une série arithmétique ?
Considérons la suite arithmétique (u_n) tel que $u_4 = 10$ et $u_9 = 35$.
1) Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n).
2) Exprimer u_n en fonction de n.

1) Les termes de la suite sont de la forme $u_n = u_0 + nr$
On a donc : $u_4 = u_0 + 4r = 10$ et $u_9 = u_0 + 9r = 35$.
En soustrayant membre à membre, on obtient : $(u_0 + 9r) - (u_0 + 4r) = 35 - 10$
Ce qui donne : $u_0 + 9r - u_0 - 4r = 35 - 10$
Soit : $5r = 25$
Donc : $r = 3$.
En remplaçant r par 5 dans u_4 par exemple, on a : $u_0 + 4 \times 5 = 10$
Soit : $u_0 + 20 = 10$
Donc : $u_0 = -10$
Ainsi :
- la raison est $r = 5$
- le premier terme est $u_0 = -10$

2) On sait que : $u_n = u_0 + nr$
Donc : $u_n = -10 + n \times 5$
On peut écrire : $u_n = 5n - 10$

4 - Variations :

Propriété : (u_n) est une suite arithmétique de raison r.
- Si $r > 0$ alors la suite **(u_n) est croissante**.
- Si $r < 0$ alors la suite **(u_n) est décroissante**.
- Si $r = 0$, alors la suite **(u_n) est constante**.

Démonstration : Si (u_n) est arithmétique de raison r, alors $u_{n+1} = u_n + r$, d'où $r = u_{n+1} - u_n$.
Donc : si $r > 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.
Donc : si $r < 0$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

5 - Somme de termes consécutifs :

Propriété : n est un entier naturel non nul alors on a : $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Démonstration : (par symétrie).
On écrit la somme deux fois, une fois dans l'ordre croissant, une fois décroissant :
$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$
$S = n + (n-1) + \cdots + 3 + 2 + 1$

On additionne terme à terme : $2S = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)$ (il y a n termes)
d'où : $2S = n(n+1) \Rightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}$

Exemple : Calculer les sommes S_1 et S_2 suivantes :

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + 227$$

C'est la somme des 227 premiers entiers.
On utilise la formule :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ avec } n = 227$$

Donc : $S_1 = \dfrac{227 \times 228}{2} = 227 \times 114 = 25\,878$

$$S_2 = 22 + 36 + 39 + \ldots + 163$$

On remarque que tous les termes sont multiples de 3 :
$S_2 = 3(11 + 12 + 13 + \cdots + 89)$

On calcule :
$= 3\left((1 + 2 + 3 + \ldots + 89) - (1 + 2 + 3 + \ldots + 10)\right)$
$= 3 \times \left(\dfrac{89 \times 90}{2} - \dfrac{10 \times 11}{2}\right)$
$= 3 \times (4005 - 55)$
Donc : $S_2 = 11\,850$

II] Suites géométriques :

1 - Définition :

Définition : Une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre q est appelé **raison** de la suite.

Exemple : Exemple : Soit (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $q = 2$. Déterminer u_1, u_2, u_3, u_4.
$u_1 = q \times u_0 = 2 \times 3 = 6$
$u_2 = q \times u_1 = 2 \times 6 = 12$
$u_3 = q \times u_2 = 2 \times 12 = 24$
$u_4 = q \times u_3 = 2 \times 24 = 48$

2 - Comment reconnaît-on une suite géométrique ?

Propriété : Une **suite de termes non nuls est géométrique** lorsque **le rapport entre deux termes consécutifs est constant**. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

Exemple n°1 : Montrer que la suite définie par : $u_n = 5^{n+3}$ est géométrique.
On calcule le rapport entre deux termes consécutifs quelconques :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^{n+1+3}}{5^{n+3}} = 5^{n+1+3-n-3} = 5$$

La suite (u_n) est géométrique de **raison** $q = 5$ et de **premier terme** $u_0 = 5^3 = 125$.

Exemple n°2 : Montrer que la suite définie par : $v_n = 4n^2 - 1$ n'est pas géométrique.
On calcule le rapport entre deux termes consécutifs quelconques :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4(n+1)^2 - 1}{4n^2 - 1} = \frac{4n^2 + 8n + 3}{4n^2 - 1}$$

Ce rapport dépend de n, donc il n'est pas constant.
On vérifie par exemple :

- Pour $n = 1$, $v_1 = 4 \times 1^2 - 1 = 3$;
- Pour $n = 2$, $v_2 = 4 \times 2^2 - 1 = 15$.

Donc : $\frac{v_2}{v_1} = \frac{15}{3} = 5$

- Pour $n = 2$, $v_2 = 4 \times 2^2 - 1 = 15$;
- Pour $n = 3$, $v_3 = 4 \times 3^2 - 1 = 35$.

Donc : $\frac{v_3}{v_2} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}$

Comme $5 \neq \frac{7}{3}$, le rapport n'est pas constant, ce qui prouve que la suite n'est pas géométrique.

3 - Expression du terme général en fonction de n :

Propriété : Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$, définie sur $\mathbb{N}$..
Alors pour tous entiers naturels n et p, on a :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

En particulier, si u est définie à partir du rang 0, on a :

$$u_0 = u_0 \times q^n$$

Démonstration : La suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme u_0 vérifie la relation : $u_{n+1} = q \times u_n$.

- Si q ou u_0 est nul, alors tous les termes de la suite sont nuls. La démonstration est évidente dans ce cas.
- Dans la suite, on suppose donc que q et u_0 sont non nuls. Dans ce cas, tous les termes de la suite sont non nuls.

En calculant les premiers termes :

$u_1 = q \times u_0$

$u_2 = q \times u_1 = q^2 \times u_0$

$u_3 = q \times u_2 = q^3 \times u_0$

…

$u_n = q \times u_{n-1} = q^n \times u_0$

Méthodologie : Comment déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique ?
Considérons la suite géométrique (u_n) tel que $u_2 = 25$ et $u_5 = 3125$.
Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n).

Les termes de la suite sont de la forme $u_n = u_0 \times q^n$.
Donc : $u_2 = u_0 \times q^2 = 25$ et $u_5 = u_0 \times q^5 = 3125$

Ainsi : $\frac{u_5}{u_2} = \frac{u_0 \times q^5}{u_0 \times q^2} = q^3$ et $\frac{u_5}{u_2} = \frac{3125}{25} = 125$

Donc : $q^3 = 125$

Ainsi : $q = \sqrt[3]{125} = 5$

Comme $u_2 = u_0 \times q^2 = 25$, on a : $u_0 \times 5^2 = 25$

Soit : $u_0 \times 25 = 25$

Donc : $u_0 = \frac{25}{32} = 1$

Ainsi :

- la raison est $q = 5$
- le premier terme est $u_0 = 1$

4 - Variations :

Propriété : Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$, géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme u_0.

- **Si $u_0 > 0$:**

Si $q > 1$, alors u est strictement croissante.
Si $q = 1$, alors u est constante.
Si $0 < q < 1$, alors u est strictement décroissante.

- **Si $u_0 < 0$:**

Si $q > 1$, alors u est strictement décroissante.
Si $q = 1$, alors u est constante.
Si $0 < q < 1$, alors u est strictement croissante.

- **Si $u_0 = 0$**, alors la suite u est constante égal à 0.

Démonstration : Dans le cas où $u_0 > 0$:

$$u_{n+1} - u_n = u_0q^{n+1} - u_0q^n = u_0q^n(q - 1).$$

- Si $q > 1$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

2- Cas d'une suite géométrique :

Propriété : n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a :

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Remarque : Il s'agit de la somme des n+1 premiers termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.

Démonstration :

On pose : $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n$
Alors : $q \times S = q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^{n+1}$

En faisant la différence : $S - q \times S = (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n) - (q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^{n+1})$

$$S - q \times S = 1 - q^{n+1}$$

Donc : $S \times (1 - q) = 1 - q^{n+1} \Rightarrow S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Exemple : Calculer la somme $S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{10}$
Ici $q = 3$ et $n = 10$. On applique la formule :

$$S = \frac{1 - 3^{11}}{1 - 3} = \frac{1 - 3^{11}}{-2} = \frac{3^{11} - 1}{2} = \frac{177\,147 - 1}{2} = \frac{177\,146}{2} = 88\,573$$