Equations

Définition : Une **équation** à une inconnue est une égalité de deux expressions, appelées les membres de l'équation, dans laquelle un nombre inconnu est désigné par une lettre.
Résoudre une équation, c'est trouver toutes ses solutions c'est-à-dire tous les nombres qui rendent vraie l'égalité.

I] Equation du 1er degré du type $ax \pm b = cx \pm d$:

1- Rappel des propriétés :

Propriété : On peut **ajouter** ou **retrancher** un même nombre aux deux membres d'une équation.

a, b et c désignent 3 nombres relatifs.
Si $a = b$ alors $a + c = b + c$ et $a - c = b - c$

Propriété : On peut **multiplier** ou **diviser** les deux membres d'une équation par un même nombre non nul.

a, b et c désignent 3 nombres relatifs avec $c \neq 0$.
Si $a = b$ alors $a \times c = b \times c$ et $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

Exemple :

$$5x - 6 = 4 + 3x$$

Etape n°1 : On regroupe les constantes (les termes sans x) dans un seul membre.

On ajoute 6 aux deux membres

$$5x - 6 + 6 = 4 + 3x + 6$$
$$5x = 10$$

Etape n°2 : On regroupe les inconnues (les termes en x) dans l'autre membre.

On enlève 3x aux deux membres

$$5x - 3x = 3x + 10 - 3x$$
$$2x = 10$$

Etape n°3 : On divise par le nombre de x pour isoler x.

On divise par 2 les deux membres

$$\frac{2x}{2} = \frac{10}{2}$$
$$x = 5$$

La solution de l'équation de 5.

II] Equation produit :

Propriété : Si un **produit** de facteurs est nul **alors l'un au moins de ses facteurs est nul**.
Autrement dit, si $A \times B = 0$ alors $A = 0$ **ou** $B = 0$

Exemple : Résoudre l'équation $(x + 2)(x - 4) = 0$

Rédaction type :

Si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins de ses facteurs est nul. ← On nomme la propriété

L'équation équivaut donc à :

$x + 2 = 0$	ou	$x - 4 = 0$
$x = -2$	ou	$x = 4$

← On résout les équations

L'équation admet deux solutions $S = \{-2 ; 4\}$ ← Phrase de conclusion

III] Equation du type $x^2 = A$:

Propriété : Pour tout nombre a,

- Si $a < 0$ alors l'équation **$x^2 = a$ n'admet pas de solution** ;
- Si $a = 0$ alors l'équation **$x^2 = a$ admet une unique solution 0** ;
- Si $a > 0$ alors l'équation **$x^2 = a$ admet 2 solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$**.

Exemples :

$x^2 = -4$	$x^2 = 36$	$x^2 = 5$
$-4 < 0$ L'équation n'admet aucune solution.	$36 > 0$ L'équation admet 2 solutions : $x = -\sqrt{36}$ et $x = \sqrt{36}$ $x = -6$ $x = 6$ $S = \{-6 ; 6\}$	$5 > 0$ L'équation admet 2 solutions : $x = -\sqrt{5}$ et $x = \sqrt{5}$ $S = \{-\sqrt{5} ; \sqrt{5}\}$

IV] Calculer un antécédent par une fonction :

Méthodologie : Pour **calculer le ou les antécédents d'un nombre a par une fonction f**, s'il y en a, on résout l'équation $f(x) = a$.

Exemples :

1) Déterminer, le ou les antécédents de 2 par la fonction $f(x) = 5x + 3$

Pour cela, on résout l'équation $f(x) = 2$:

$$5x + 3 = 2$$
$$5x + 3 - 3 = 2 - 3$$
$$5x = -1$$
$$x = \frac{-1}{5}$$

L'antécédent de 2 par la fonction $f(x) = \frac{-1}{5}$

2) Déterminer, le ou les antécédents de 2 et − 2 par la fonction $g(x) = x^2$

Déterminons, le ou les antécédents de 2 par la fonction $g(x) = x^2$. Pour cela, on résout l'équation $g(x) = 2$: $x^2 = 2$ $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$ Les antécédents de 2 par la fonction $g(x) = x^2$ sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.	Déterminons, le ou les antécédents de − 2 par la fonction $g(x) = x^2$. Pour cela, on résout l'équation $g(x) = -2$: $x^2 = -2$ Or un nombre au carré ne pouvant être négatif, l'équation n'a aucune solution, − 2 n'a aucun antécédent par la fonction g.