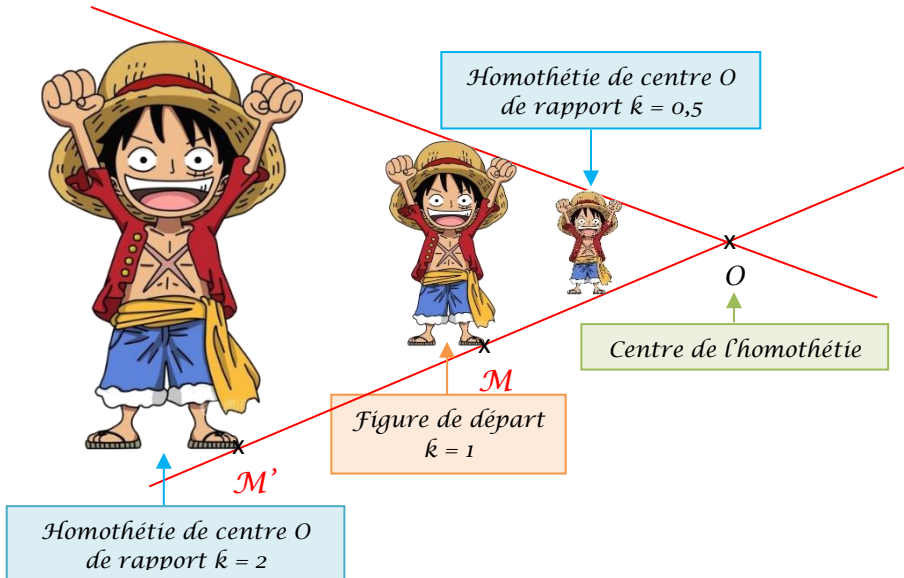


Homothétie

1) Définition :

Définition : Une homothétie de rapport k (k est un nombre relatif) est une transformation géométrique permettant d'agrandir ou de réduire une figure par rapport à un point appelé le centre de l'homothétie.

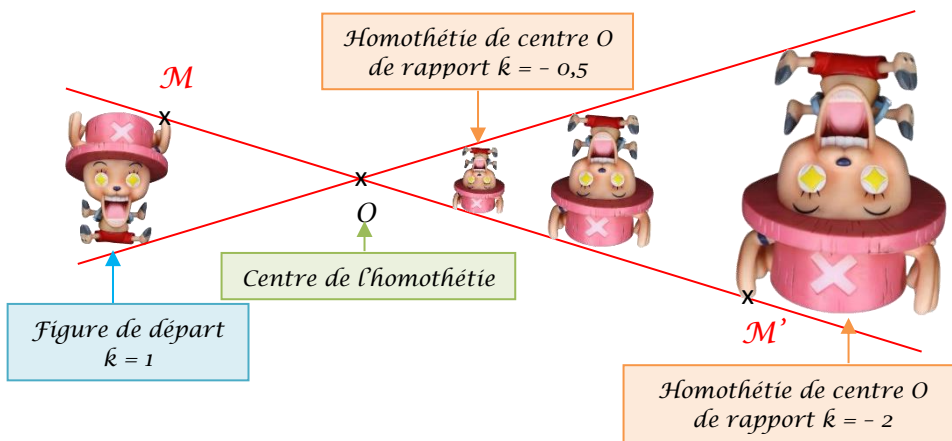
1) Homothétie de rapport positif :



M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport 2 , signifie que :

- O , M et M' sont alignés.
- M et M' sont du même côté par rapport à O .
- $OM' = 2 \times OM$

2) Homothétie de rapport négatif :



M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport $-0,5$ signifie que :

- O , M et M' sont alignés.
- M et M' ne sont pas du même côté par rapport à O .
- $OM' = 0,5 \times OM$

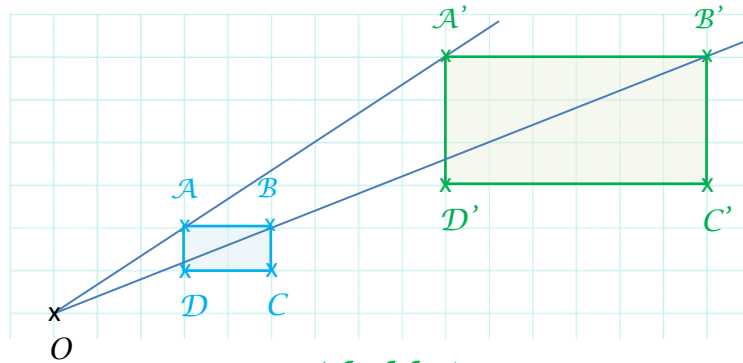
Remarques :

- Si $k > 1$ ou si $k < -1$, alors l'homothétie correspond à un agrandissement.
- Si $-1 < k < 1$, alors l'homothétie correspond à une réduction.

II] Centre et rapport d'une homothétie :

1- Comment retrouver le centre d'une homothétie ?

On considère la figure suivante où $A'B'C'D'$ est l'image du rectangle $ABCD$ par homothétie dont on souhaite déterminer son centre.



Méthodologie :

Etape n°1 : Tracer une droite qui passe par un point et son image, exemple A et A' .

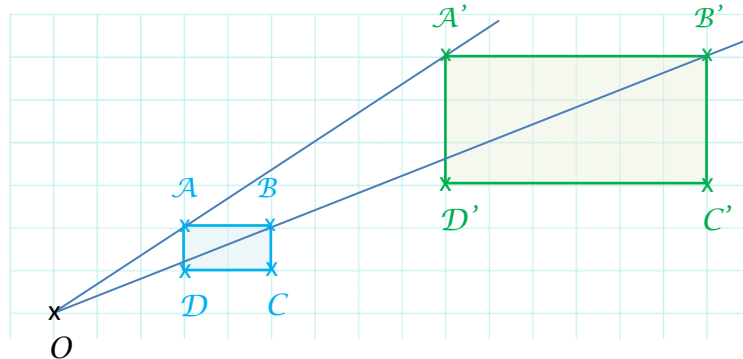
Etape n°2 : Tracer une deuxième droite qui passe par un autre point et son image, exemple B et B' .

L'intersection de ses deux droites est le centre de l'homothétie.

Remarque : Il faut un minimum de deux droites pour trouver le centre d'homothétie. En effet, si on trace une troisième droite, une quatrième et ainsi de suite, alors elles passeront toutes par le même point d'intersection trouvé précédemment à l'aide des deux premières droites.

2- Comment trouver le rapport d'une homothétie ?

On considère la figure suivante où $A'B'C'D'$ est l'image du rectangle $ABCD$ par de centre O dont on souhaite déterminer le rapport.



Méthodologie :

Appelons k le rapport de l'homothétie.

$$k = \frac{\text{Distance entre le centre de l'homothétie et un sommet image}}{\text{Distance entre le centre de l'homothétie et son sommet initial}}$$

$$k = \frac{OA'}{OA} = \frac{9}{3} = 3$$

On peut bien entendu calculer les rapports $\frac{OB'}{OB}$; $\frac{OC'}{OC}$; $\frac{OD'}{OD}$ qui donneront le même résultat.

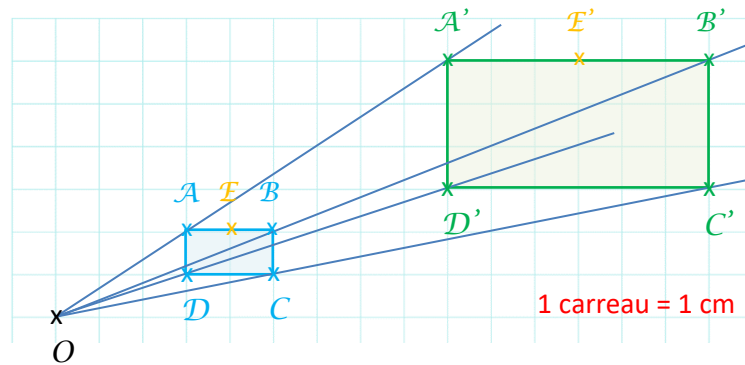
$$k = \frac{\text{Longueur d'un côté de l'image}}{\text{Longueur de son côté de la figure de départ}}$$

$$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{6}{2} = 3$$

On peut bien entendu calculer les rapports $\frac{B'C'}{BC}$; $\frac{C'D'}{CD}$; $\frac{D'A'}{DA}$ qui donneront le même résultat.

IV] Propriétés de l'homothétie :

On considère la figure suivante ou, $A'B'C'D'$ est l'image du rectangle $ABCD$ par l'homothétie de centre O et de rapport $k = 3$.



Propriété n°1 :

L'homothétie conserve,

- **l'alignement** : A , E et B sont alignés donc A' , E' et B' sont aussi alignés.

- **les milieux** : E est le milieu de $[AB]$ donc E' est le milieu de $[A'B']$

- **le parallélisme** : $(AD) \parallel (BC)$ donc $(A'D') \parallel (B'C')$

- **la mesure des angles** : $\widehat{ADE} = \widehat{A'D'E'} = 90^\circ$

Propriété n°2 :

Dans une homothétie de rapport $k > 0$,

- **Les longueurs sont multipliées par k** ;

$$AB = 2 \text{ cm}$$

$$A'B' = 3 \times AB$$

$$A'B' = 3 \times 2$$

$$A'B' = 6 \text{ cm}$$

- **Les aires sont multipliées par k^2** .

$$\text{Aire}(A'B'C'D') = 3^2 \times \text{Aire}(ABCD)$$

$$\text{Aire}(A'B'C'D') = 3^2 \times 2$$

$$\text{Aire}(A'B'C'D') = 9 \times 2$$

$$\text{Aire}(A'B'C'D') = 18 \text{ cm}^2$$

III] Construction :

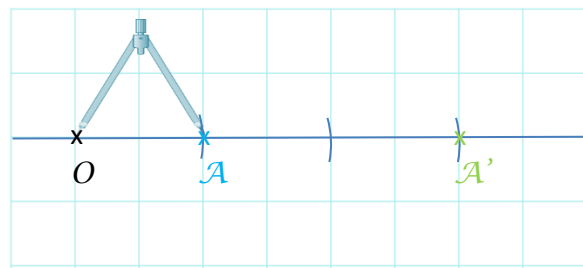
1- Construction d'un point par homothétie :

Construire A' l'image du point A par l'homothétie de centre O de rapport 3.

Méthodologie :

Etape n°1 : Tracer la droite (OA) passant par O le centre de l'homothétie et A le point dont on cherche à tracer son image.

Etape n°2 : Reporter 3 fois la longueur OA en partant de O le centre de l'homothétie le long de la droite (OA) vers A puisque le rapport de l'homothétie est positif.

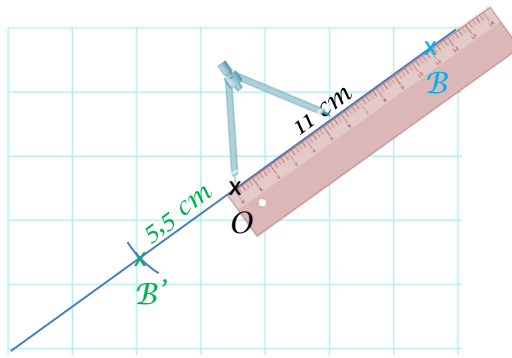


Construire B' l'image du point B par l'homothétie de centre O de rapport $-0,5$.

Méthodologie :

Etape n°1 : Tracer la droite (OB) passant par O le centre de l'homothétie et B le point dont on cherche à tracer son image.

Etape n°2 : Reporter la moitié de la longueur OB en partant de O le centre de l'homothétie le long de la droite (OB) de l'autre côté de B puisque le rapport de l'homothétie est négatif.



2- Construction d'une figure par homothétie :

Construire $A'B'C'$ l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre O de rapport -2 .

Méthodologie :

On construit respectivement les images A' , B' et C' des points A , B et C par l'homothétie de centre O et de rapport -2 .

Etape n°1 : On construit A' l'image de A , par exemple :

- On trace la droite (OA) .
- On reporte 2 fois la longueur OA en partant de O le long de la droite (OA) de l'autre côté de A puisque le rapport de l'homothétie est négatif.

Etapes n°2 et n°3 : De la même manière, on construit B' l'image de B et C' l'image de C .

